This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

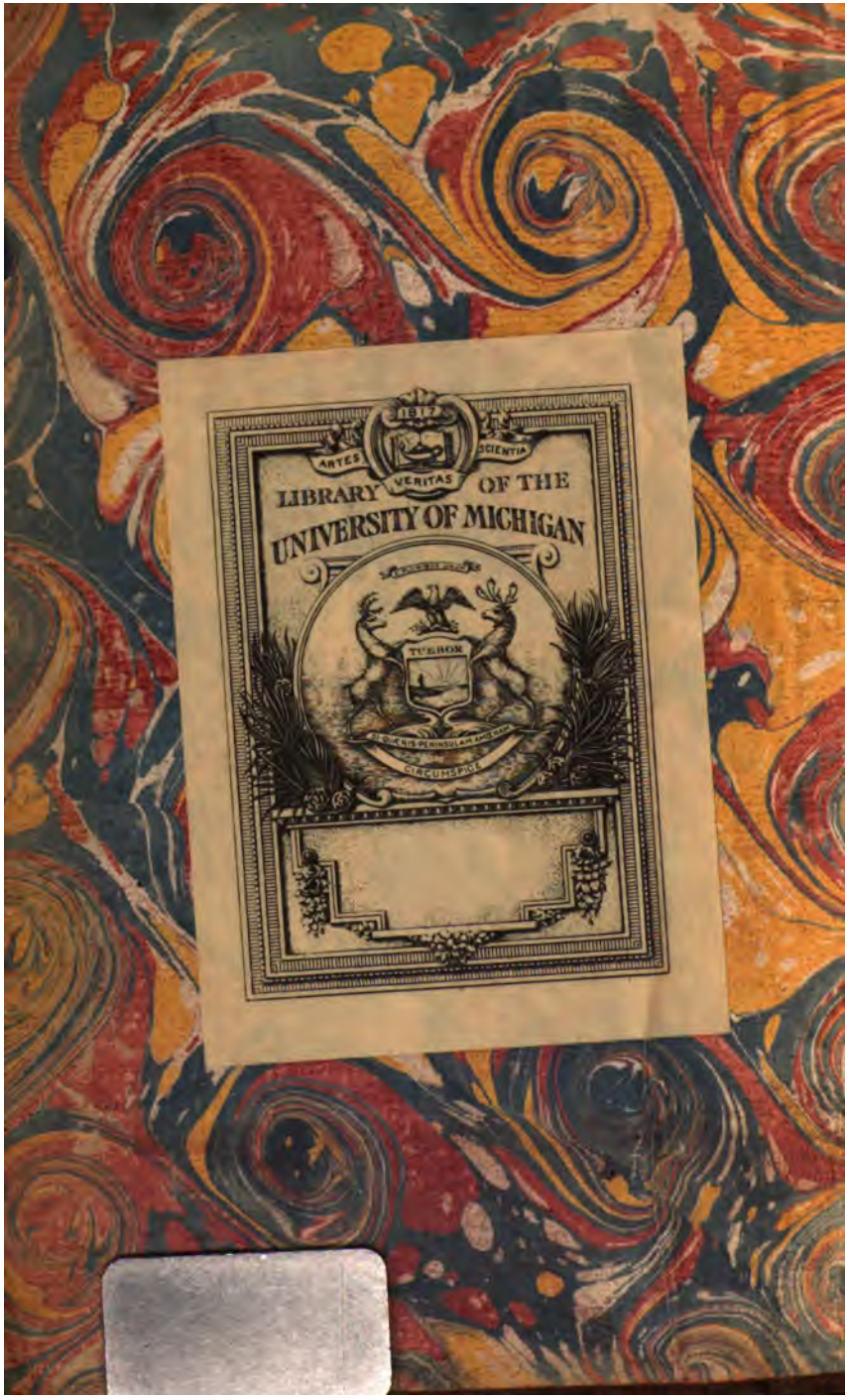
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

95
R.289

Q
164
099
175c

RECREATIONS MATHEMATIQUES

ET

PHYSIQUES,

QUI CONTIENNENT

Pluſieurs problêmes d'arithmétique, de géométrie, de muſique, d'optique, de gnomonique, de coſmographie, de méchanique, de pyrotechnie, & de phyſique. Avec un traité des horloges élémentaires.

Par feu M. OZANAM, de l'Académie Royale des Sciences, & Profeſſeur en Mathématique.

NOUVELLE EDITION,

Revue, corigée & augmentée.

TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. L.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

Hist. des Sciences
Mathém.
12-21-32
27272 4K

PRÉFACE.

JE ne m'excuſerai pas de ce qu'après avoir donné au Public des traités ſérieux, qui demandent toute l'application des lecteurs, il ſemble que je veuille diſſiper leur application, & les en détourner par les jeux d'eſprit que je leur préſente dans ces derniers volumes. La mémoire des grands hommes qui ont fait la même choſe que j'entreprends, eſt ſi glorieuſe, que leur exemple vaut toutes les juſtifications que je pourrois apporter. Le docte Bachet, ſieur de Méziriac, célebre par ſes excellens ouvrages, commença à ſe faire connoître dans la république des lettres par un recueil qu'il intitula, *Problêmes plaiſans, qui ſe font par les nombres.* Il voulut par ce livre s'aſſurer de ſon talent, & du jugement du public, avant que de mettre au jour ſes commentaires ſur l'arithmétique de Diophante, & les autres livres qui lui ont acquis une gloire immortelle. Pluſieurs autres auteurs de ce ſiecle, comme le fameux Pere Kircher, & les Peres Schot & Bertin n'ont pas moins fait de

bruit dans le monde ſavant, par les problêmes divertiſſans qu'ils ont mis dans leurs ouvrages, que par leurs raiſonnemens, & par leurs plus ſérieuſes obſervations.

Quoique ces grands exemples puiſſent ſuffire pour autoriſer mon deſſein, néanmoins afin que ces hommes illuſtres, que j'ai pris pour garans, ne ſoient pas eux-mêmes expoſés à la cenſure de ceux qui voudroient les accuſer de nouveauté, je produirai des exemples bien plus anciens, qui font voir que de tout tems les plus grands hommes ont tenu la même conduite, s'étant bien apperçus que le même fond de raiſon qui fait trouver du plaiſir dans l'admiration, en doit auſſi faire trouver dans les choſes qui ſont le ſujet de l'admiration.

Le commerce d'énigmes que les rois de Syrie entretenoient, & qui a fait durer ſi long-tems après eux le ſtile parabolique, n'étoit autre choſe que des jeux d'eſprit, & des entretiens également propres à exciter le plaiſir, & à donner de l'élévation à l'eſprit. Les grands de ce tems-là étoient faits comme ceux d'aujourd'hui, la peine les rebutoit; c'étoit un coup de l'adreſſe & de l'habileté extraordimaire de ceux qui les vouloient

inſtruire, que de les attacher à l'étude & à la réflexion, par le plaiſir & par la curioſité. Je ne doute pas que l'éducation que Nathan donna à Salomon par cet exercice, n'ait beaucoup contribué à cette élévation d'ame, & à cette ſageſſe merveilleuſe qui fait le caractere & la gloire de ce prince.

C'étoit auſſi par maniere de divertiſſement que les Chaldéens & les Egyptiens qui ont inventé l'aſtronomie, marquoient par avance à leurs amis les jours & les circonſtances des éclipſes, & qu'ils leur traçoient des figures qui partageoient la durée des jours, qui montroient les routes des étoiles, & qui repréſentoient toutes les variétés des mouvemens des cieux; perſuadés, auſſi bien que les Grecs, que les premiers plaiſirs de l'eſprit ſont ceux que l'on emprunte des mathématiques, dans leſquels ils faiſoient élever leurs enfans. Ils croyoient que ſi la raiſon des enfans étoit ſans action, elle n'étoit pas néanmoins ſans force, & qu'il n'y avoit qu'à lui donner du mouvement pour la perfectionner: ce qui ſe pouvoit faire, en donnant aux enfans de la curioſité, qui fait en eux ce qu'une longue ſuite de néceſſités de la vie fait dans les perſonnes d'un âge plus avancé. C'eſt là le ſecret de

Il eſt certain que le jeu des échets a été inventé pour inſtruire, auſſi-bien que pour divertir ; en repréſentant les attaques & les défenſes des pieces différentes, leur marche, & leurs aventures, on a voulu faire des leçons de morale, & montrer par le déſaſtre du roi des échets, qu'un prince tombe immanquablement au pouvoir de ſes ennemis quand il s'eſt dépouillé de ſes ſoldats, & qu'il ne peut négliger la perte d'un ſeul de ſes ſujets, ſans s'expoſer à celle de ſes propres Etats.

On peut réduire tous les jeux qui ont été inventés, ou qu'on pourroit inventer, à trois claſſes différentes : la premiere eſt de ceux qui dépendent abſolument des nombres & des figures, comme les échets, le jeu des dames, & quelques autres : la ſeconde de ceux qui dépendent du haſard, comme les dez, & les jeux ſemblables : la troiſieme de ceux qui dépendent de la juſteſſe des mouvemens, comme les jeux de l'arquebuſe, de l'arc, de la paume, & du billard ; il y en a qui ſont mêlés d'adreſſe & de haſard, comme le trictac, le hocca, les cartes, & la plupart des autres. Mais il eſt conſtant qu'il n'y en a point qu'on ne puiſſe tellement ſoumettre aux regles des mathématiciens, que l'on ne fût aſſuré de gagner, ſi l'on y pouvoit

V. l'Eſſai d'analyſe ſur les jeux de

apporter toute l'habileté néceſſaire. Les jeux d'adreſſe ont tant de rapport aux principes de la ſtatique & de la mécanique, que ce n'eſt que faute d'en bien ſçavoir les regles, ou de les bien mettre en uſage, que l'on ne gagne pas dans ces jeux-là. Il n'y a point de jeux de haſard, où la victoire ne dépende de la rencontre d'un nombre, ou du poids, ou de l'étendue de la figure. Le joueur qui imprime le mouvement, pourroit déterminer la fin, s'il étoit parfaitement habile, & quoique cela ne paroiſſe pas poſſible, parce qu'on ne trouve perſonne d'une parfaite habileté, il eſt néanmoins vrai que l'on pourroit le faire, & qu'une méthode infaillible de gagner aux échets, n'eſt pas abſolument impoſſible; perſonne ne l'a encore trouvée, & je ne crois pas qu'on la trouve jamais, parce qu'elle dépend d'un trop grand nombre de combinaiſons. C'eſt aſſez qu'un point de perfection ſoit poſſible, pour engager les curieux au travail. L'orateur parfait, diſoit Cicéron, n'a jamais été; mais il eſt poſſible, ſon idée tel que ce grand maître l'a peint, ſert de modele à ceux qui ſe mettent en devoir de ſe rendre habiles en éloquence. Il en eſt de même du poëte, du peintre, de l'architecte, du médecin, & de tous les

hazard, par M. de Montmaur.

autres. Auſſi quoiqu'il ſoit vrai que perſonne ne ſçaura jamais la méthode immanquable de tous les jeux, ni peut-être d'aucun, néanmoins il ne faut pas laiſſer de s'y rendre le plus habile que l'on peut, en tâchant d'approcher de l'idée qu'on ſe fait de cette méthode, qui eſt enfermée dans l'exactitude des regles & des principes des mathématiques.

C'eſt une choſe bien extraordinaire, que de vouloir mettre les joueurs dans mon parti, & engager dans l'étude des récréations mathématiques les hommes d'état & les capitaines; mais puis-je empêcher tout le monde de profiter des leçons qui ſont établies ſur les principes les plus naturels, & ſur les vérités attachées à l'eſſence des choſes? Puis-je défendre des plaiſirs qui ſont engageans par leur utilité, & qui ſont ſi communs, ſi faciles & ſi propres à tous ceux qui ont de la raiſon, qu'on ne peut les ôter aux hommes, ſans les priver de ce qu'il y a de plus agréable dans la vie.

On croit depuis ſi long-tems qu'il y a eu quelque art ſecret entre les plus ſavans des Juifs, des Arabes, & des diſciples de cette ancienne académie qui tenoit en Egypte, où Moïſe fut élevé, & qui floriſſoit encore du tems de Salomon; que

cela a excité la curioſité des meilleurs eſprits, pour découvrir ce qui en eſt : mais le moyen d'apprendre un art ſans maître & ſans livre ? Les ſavans de ces tems-là n'écrivoient point, ou s'ils écrivoient, c'étoient des énigmes & des diſcours ſi éloignés de ce qu'on attend, qu'on peut dire que leur ſilence eſt plus inſtructif que leurs diſcours.

Le Pere Sehot dit qu'il y a trois ſortes de cabales ; c'eſt le nom qu'il donne à cet art ſecret des Orientaux, celle des Rabins, celle de Raimond Lulle, & celle des Algebriſtes. Il ne peut dire ce que c'eſt que la premiere : les deux dernieres ſont des jeux de nombres & de figures. Je ne doute pas que la premiere ne ſoit la même choſe. Joſephe, qui étoit prêtre, écrit hardiment que par le droit de ſa naiſſance, il avoit été inſtruit dans tous les myſteres des Juifs, & qu'on lui avoit enſeigné tous les ſecrets de leur art. Il ſe flatta par un eſprit de cour, qui l'emporta par deſſus ſa conſcience, d'avoir prédit par la force de cet art, l'élevation de Titus, qui fut empereur. Il cacha ſon jeu, comme un habile homme doit faire. Il ſoutient le perſonnage de merveilleux ; & quand il parle de l'aventure où il faillit à perdre la vie par le déſeſpoir de ſes ſoldats, réſolus

de s'égorger les uns les autres, plutôt que de ſe rendre aux Romains, il attribue ſa conſervation, ou au hazard, ou à un miracle. Cependant il eſt à croire que Joſephe ne fit ce miracle que par la ſcience des nombres & des figures; il fit ranger ces déſeſpérés de maniere que le ſort tomba ſur ceux que le capitaine voulut bien laiſſer périr. Il ſauva ſa vie parce qu'il étoit mathématicien, & non pas parce qu'il étoit lévite. Ce qui fait voir que les connoiſſances les plus abſtraites ſe peuvent réduire en pratique, & qu'on peut mettre à quelque uſage ce qui en paroît le plus éloigné.

V. page 248 du tome I.

Je m'étonne de ce que du tems des empereurs Dioclétien & Conſtantin, les loix défendirent les mathématiques, comme des connoiſſances dangereuſes, en condamnant les mathématiciens & les ſorciers aux mêmes peines, comme également criminels & pernicieux à la ſociété civile, ſelon ce qui paroît par le titre 17 du livre 9 du code de Juſtinien. Je crois que c'eſt par l'ignorance qui regnoit en ce tems-là, & par le grand nombre des charlatans qui ſe ſervoient des mathématiques pour impoſer & pour tromper la crédulité des ignorans. Mais il faut blâmer la ſtupidité de ceux qui ſe laiſſent

tromper, & il ne faut pas autoriſer la fainéantiſe de ceux qui ne veulent pas cultiver aſſez leur eſprit pour être en état de n'être jamais ſurpris. On a vu des états qui ont permis les ſoupleſſes, les petits larcins faits avec adreſſe, pour tenir les particuliers ſur leurs gardes, & pour, les accoutumer à prendre toujours de bonnes précautions.

L'ignorance tient le monde dans une admiration perpétuelle & dans la méfiance, ce qui produit toujours une envie invincible de blâmer & de perſécuter ceux qui ſavent quelque choſe de plus que le commun, qui n'étant pas accoutumé à s'élever au-deſſus des choſes ſenſibles, & ne pouvant s'imaginer que la nature emploie des agens qui ne ſoient pas viſibles & palpables, attribue ſouvent aux ſorciers & aux démons tous les effets dont il ne connoît pas la cauſe. Je veux par mes récréations mathématiques, enſeigner tout le monde à faire ces ſorcelleries, qui faiſoient peur aux gens du conſeil de Juſtinien; & par-là je ferai plus qu'un ſavant homme *, qui s'eſt contenté du ſimple raiſonnement, pour défendre ſaint Thomas d'Aquin, Albert le Grand, Salomon, & pluſieurs autres grands hommes, qui n'ont été accuſés

* Gabriel Naudé.

d'être magiciens, que parce qu'ils ſçavoient faire quelque choſe de plus que les autres.

Un ſeul livre n'étant pas capable de contenir toutes les propoſitions qu'on peut faire ſur cette matiere, on a diviſé cet ouvrage en quatre volumes, où l'on donne les problêmes les plus faciles, les plus utiles & les plus agréables. Le premier contient les problêmes d'arithmétique, de géométrie, de muſique & d'optique. Le ſecond volume comprend les problêmes de gnomonique, de coſmographie & de mécanique. Le troiſieme volume renferme les problêmes de pyrotechnie & de phyſique, avec un traité des horloges élémentaires. Le quatrieme & dernier volume traite des phoſphores naturels & artificiels & des lampes ſépulchrales des anciens. On y a joint un recueil des tours de gibeciere & de gobelets les plus connus & les plus récréatifs.

PRIVILÉGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conſeillers les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé C. A. JOMBERT, Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il deſireroit faire réimprimer & donner au Public des livres qui ont pour titre : *les Oeuvres de Mathématiques, de feu M. Ozanam, de l'Académie des ſciences ; Secrets des Arts & Métiers ; le Teinturier parfait ; l'Art de la Verrerie ; l'Art de tourner, du Pere Plumier* : s'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege ſur ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces préſentes, de faire réimprimer leſdits livres en un ou pluſieurs volumes, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de les vendre, faire vendre, débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de neuf années conſécutives, à compter du jour de la date deſdites Préſentes ; faiſons défenſes à toutes autres perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance ; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire réimprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire leſdits livres, ni d'en faire aucuns extraits, ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentations, corrections & autres ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que la réimpreſſion deſdits livres ſera faite dans notre royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele ſous le contre-

ſoel des préſentes ; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux réglemens de la Librairie, & notamment a celui du 10 avril 1725 ; & qu'avant de les expoſer en vente, les manuſcrits ou imprimés qui auront ſervi de copie à la réimpreſſion deſdits livres, ſeront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le ſieur d'Agueſſeau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux exemplaires dans notre bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier d'Agueſſeau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Préſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant, ou ſes ayans cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie déſdites Préſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits livres, ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secrétaires foi ſoit ajoutée comme à l'original : commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis, & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le 22e jour du mois de juillet l'An de Grace mil ſept cent quarante-ſix, & de notre Regne le trente-unieme. Par le Roi en ſon Conſeil.

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre 11 *de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris*, N°. 615, *fol.* 543, *conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du* 28 *Février* 1733. *A Paris le* 5 *Mai* 1746.

VINCENT, *Syndic.*

RECREATIONS MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES.

Problêmes d'arithmétique.

COMME je ne prétends pas propoſer des problêmes difficiles, je ne prétends pas auſſi en donner les démonſtrations, pour ne pas embarraſſer le lecteur, que je veux divertir. Je me contenterai de donner la ſolution de ces problêmes par des regles qui ne ſont ſujettes à aucune erreur.

PROBLEME I.

Des religieuſes ſont retirées en huit cellules tellement diſpoſées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du dortoir bâti en quarré, & chacune des quatre autres eſt au milieu de chaque côté. L'abbeſſe qu'on ſuppoſe aveugle, fait ſa viſite : elle compte le nombre des religieuſes qui ſont dans les trois

cellules d'un rang, elle trouve que le nombre des religieuſes d'un rang eſt égal à celui de chaque autre rang, en prenant pour un rang deux cellules des coins & celle du milieu. Cette abbeſſe fait une viſite, & compte dans chaque rang le même nombre de perſonnes que dans la premiere viſite, quoiqu'il y ſoit entré quatre hommes. Enfin dans la troiſieme viſite qu'elle fait, elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de perſonnes qu'auparavant, quoique les quatre hommes ſoient ſortis, & qu'ils ayent emmené chacun une religieuſe.

JE ſuppoſe qu'il y ait d'abord trois religieuſes dans chaque cellule. L'abbeſſe en comptera neuf à chaque rang dans la premiere viſite qu'elle fera. Si enſuite une religieuſe ſort de chaque cellule du coin pour entrer avec un homme dans la cellule du milieu, qui eſt à ſa gauche, l'abbeſſe faiſant ſa ſeconde viſite, trouvera encore neuf perſonnes dans chaque rang du dortoir. Enfin ſi chahomme * emmene ſa religieuſe, & que deux religieuſes ſortant de chaque cellule du milieu, entrent dans l'une des cellules des coins qui eſt à leur droite, l'abbeſſe comptera dans une troiſieme viſite neuf perſonnes à chaque rang du dortoir.

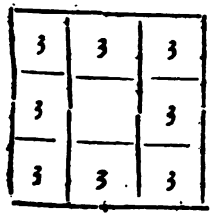
REMARQUE.

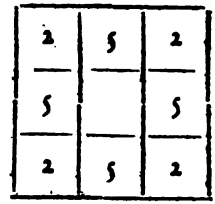
On peut aiſément exécuter ce problême avec des jetons, & le pouſſer plus loin en faiſant faire une quatrieme viſite à l'abbeſſe, qui trouvera toujours neuf perſonnes à chaque rang du dortoir, quoique chaque religieuſe, qui étoit ſortie avec un homme,

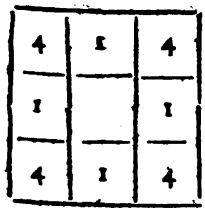
* Qui étoit enfermé dans la cellule du milieu.

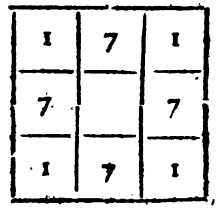
ſon rentrée avec deux hommes. Avant cette quatrieme viſite, il faut faire paſſer de chaque cellule de coin trois religieuſes dans la cellule du milieu, où elles entreront avec leur compagne, qui y amenera deux hommes.

Ces figures feront connoître ſenſiblement ce qu'il y a à faire pour la ſolution de ce problême.









PROBLEME II.

On a mené ſur le bord d'une riviere un loup, une chevre & un chou. On propoſe à un batelier de les paſſer ſeul à ſeul, de maniere qu'en ſon abſence le loup ne faſſe aucun mal à la chevre, & que la chevre ne touche point au chou.

LE batelier commencera par paſſer la chevre, puis il retournera prendre le loup; quand il aura paſſé le loup, il ramenera la chevre qu'il

laiſſera à bord pour paſſer le chou du côté du loup. Enfin il retournera prendre la chevre, & la paſſera. Par ce moyen le loup ne ſe trouvera avec la chevre, ni la chevre avec le chou, qu'en la préſence du batelier.

PROBLEME III.

Trois maris jaloux ſe trouvent avec leurs femmes pendant une nuit fort obſcure au paſſage d'une riviere. Ils rencontrent un bateau ſans batelier. Ce bateau eſt ſi petit, qu'il ne peut porter que deux perſonnes à la fois. On demande comment ces ſix perſonnes paſſeront deux à deux, de ſorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, ſi ſon mari n'eſt préſent.

DEux femmes paſſeront d'abord, puis l'une ayant ramené le bateau, repaſſera avec la troiſieme femme. Enſuite l'une des trois femmes ramenera le bateau, & ſe mettant à terre, laiſſera paſſer les deux hommes dont les deux femmes ſont de l'autre côté. Alors un des hommes ramenera le bateau avec ſa femme, & la mettant à terre, il prendra le troiſieme homme, & repaſſera avec lui. Enfin la femme qui ſe trouve paſſée entrera dans le bateau, & ira chercher en deux fois les deux autres femmes.

On met ici quatre vers latins qui contiennent la ſolution de ce problême.

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem;
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit & redeunt bini; mulierque ſororem
Advehit: ad propriam fine maritus abit.

REMARQUE.

On propoſe encore ce problême ſous le titre de trois maîtres & de trois valets. Les maîtres s'accordent bien enſemble & les valets auſſi. Mais chaque maître ne peut ſouffrir les valets des deux autres maîtres; de maniere que s'il ſe trouvoit avec l'un des deux valets en l'abſence de ſon maître, il ne manqueroit pas de le bien battre.

PROBLEME IV.

Faire l'addition d'une maniere particuliere, & qui ſoit inconnue à tout autre.

CEtte addition eſt pratiquée par les marchands qui ne ſe ſervent point de chiffres ordinaires, pour marquer le prix de leurs marchandiſes. Ils ſe font une arithmétique particuliere avec des lettres, ou tels autres caracteres qu'il leur plaît. Ils prennent, par exemple, ces dix lettres de notre alphabeth, b, o, n, e, f, a, c, i, u, s, auſquelles ils donnent la valeur des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, o. Ainſi quand ils veulent marquer 11, ils déſignent ce nombre par bb. Quand ils veulent exprimer 59, ils le font par fu. Ils emploient ces lettres de la même maniere qu'on a coutume d'employer les chiffres ordinaires 1, 2, 3, &c. en ſorte que ces caracteres b, o, n, &c. étant à la premiere place à droite, ne marquent que des unités; mais quand ils ſe trouvent à la deuxieme place, ils ſignifient des dixaines; à la troiſieme ils expriment des centaines, & ainſi des autres; de même que dans l'arithmétique, où nous nous ſervons de caracteres arabes,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, o.
b, o, n, e, f, a, c, i, u, s.

EXEMPLES.

11. 12. 13. 14. 24. 25. 36. 48. 59. 60. 112. &c.
bb. bo. bn. be. oe. of. na. ei. fu. af. bbo. &c.

PROBLEME V.

Souſtraire par une ſeule opération pluſieurs ſommes de pluſieurs ſommes données.

POur ôter toutes les ſommes d'en bas, qui ſont au-deſſous de la ligne en B, de toutes les ſommes d'en haut, qui ſont au-deſſous de la ligne en A, on commencera à ajouter les nombres de la premiere colonne d'en bas à la droite, en diſant, 8 & 4 font 12, & 2 font 14, que l'on ôtera de la plus proche dixaine, c'eſt-à-dire, de deux dixaines, ou de 20 : le reſte ſera ajouté à la colonne correſpondante de deſſus, en diſant 6 & 8 font 14, & 2 font 16, & 4 font 20, & 3 font 23; il faudra écrire 3 au deſſous; & parce qu'il y a ici deux dixaines comme auparavant, on ne retiendra rien. Ajoutez de la même façon les nombres de la colonne ſuivante d'en bas, en diſant 0 & 5 font 5, & 4 font 9, qu'on ôtera de la plus proche dixaine, ou de 10 : le reſte 1 ſera ajouté à la colonne correſpondante d'en haut, en diſant 1 & 4 font 5, & 5 font 10, & 6 font 16, & 4 font 20, il faudra écrire 0 au-deſſous, & parce qu'il y a ici deux dixaines, & que dans la colonne d'en bas il n'y en a eu qu'une, on re-

56243	
84564	A
1252	
26848	
2942	
3654	B
2308	
162003	

tiendra la différence 1, qu'on ôtera de la colonne ſuivante d'en bas, à cauſe qu'on a trouvé plus de dixaines en A qu'en B; car il la faudroit ajouter ſi l'on avoit trouvé moins de dixaines en A qu'en B. Quand il arrivera que cette différence ne pourra être ôtée de la colonne d'en bas, pour n'y avoir point de figures ſignificatives, comme il arrive ici a la cinquieme colonne, on l'ajoutera à la colonne d'en haut, & l'on écrira toute la ſomme au-deſſous de la ligne, de ſorte que dans cet exemple l'on aura 162003, pour le reſte de la ſouſtraction.

PROBLEME VI.

Multiplication abrégée.

POur multiplier un nombre quelconque, par exemple, 128 par un nombre qui ſoit produit par la multiplication de deux autres, comme par 24, qui eſt produit par la multiplication de ces deux 4, 6, ou de ces deux autres 3, 8; on multipliera le nombre propoſé 128 par 4, & le produit 512 par 6: ou bien on multipliera le nombre propoſé 128 par 3, & le produit 384 par 8, & l'on aura 3072 pour le produit de la multiplication qu'il falloit faire.

D'où il ſuit que pour multiplier un nombre propoſé par un nombre quarré, il faut multiplier le nombre propoſé par le côté de ce nombre quarré, puis multiplier le produit par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 25, dont la racine quarrée, ou le côté, eſt 5, on multipliera 128 par 5, & le produit 640 encore par 5, & l'on aura 3200 pour le produit de la multiplication. Ainſi

pour ſçavoir combien il y a de pieds quarrés en 32 toiſes quarrées, on multipliera 32 par 6, & le produit 192 encore par 6, & l'on aura 1152 pour le nombre des pieds quarrés qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque, par exemple, 128 par un nombre qui ſoit produit par la multiplication de trois autres, comme par 108, qui eſt produit par la multiplication de ces trois 2, 6, 9, ou de ces trois 3, 6, 6; on multipliera le nombre propoſé 128 par 2, le produit 256 par 6, & le ſecond produit 1536 par 9. Ou bien l'on multipliera le nombre propoſé 128 par 3, le produit 384 par 6, & le ſecond produit 2304 encore par 6, & l'on aura 13824 pour le produit qu'il falloit trouver.

D'où il ſuit que, pour multiplier le nombre propoſé par un nombre cubique, il faut multiplier le nombre propoſé par le côté de ce nombre cubique, le produit par le même côté, & le ſecond produit encore par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 125, dont la racine cubique ou le côté eſt 5, on multipliera d'abord 128 par 5, puis le produit 640 encore par 5, enfin le ſecond produit 3200 par 5, & l'on aura 16000 pour le produit de 128 par 125. Ainſi pour ſçavoir combien il y a de pieds cubes en 32 toiſes cubes, on multipliera 32 par 6, enſuite le produit 192 auſſi par 6, enfin le ſecond produit 1152 encore par 6, & l'on aura 6912 pour le nombre des pieds cubes qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque par telle puiſſance qu'on voudra de 5, on ajoutera au nombre propoſé vers la droite autant de zero que l'expoſant de la puiſſance comprendra d'unités, comme un zero pour 5, deux zero pour ſon quarré 25,

trois zero pour ſon cube 125, & ainſi de ſuite. On diviſera ce nombre ainſi augmenté par une ſemblable puiſſance de 2, ſçavoir par 2 pour 5, par 4 pour ſon quarré 25, par 8 pour ſon cube 125, & ainſi de ſuite.

Comme pour multiplier 128 par 5, on diviſera 1280 par 2, & le quotient 640 ſera le produit qu'on cherche. Mais pour multiplier 128 par 25, quarré de 5, on diviſera 12800 par 4, quarré de 2, & le quotient donnera 3200 pour le produit. Si on veut multiplier le même nombre 128 par 125, cube de 5, on diviſera 128000 par 8, cube de 2, & le quotient 16000 ſera le produit cherché. On fera les mêmes opérations pour les autres puiſſances, comme on le voit dans la table ſuivante, qui n'a été continuée que juſqu'à la 7e puiſſance.

1280	12800	128000	1280000
5	25	125	625
2	4	8	16
640	3200	16000	80000

12800000	128000000	1280000000
3125	15625	78125
32	64	128
400000	2000000	10000000

Pour ſçavoir combien valent 53 louis d'or à 11 livres le louis d'or, on écrira 53 ſous 53, en l'avançant d'une colonne vers la gauche, en ſorte que

le 3 réponde ſous le 5, & la ſomme de ces
53 deux nombres ainſi diſpoſés, donnera 583
53 livres pour la valeur de 53 louis d'or, à 11
583 livres le louis d'or.

Pour ſçavoir combien valent 53 louis d'or à 12 liv. 10 ſ. le louis d'or, on prendra la huitieme partie du nombre donné 53, augmenté de deux zero vers la droite, ſçavoir la huitieme partie de 5300 conſidéré comme 5300 livres, & l'on aura 662 liv. 10 ſ. pour la valeur de 53 louis d'or à 12 liv. 10 ſ. le louis d'or.

Pour ſçavoir combien valent 53 louis d'or à 12 liv. 5 ſ. le louis d'or, on multipliera 53, que l'on conſidérera comme 53 livres, par 7, & le produit 371 liv. encore par 7. Le quart du ſecond produit 2597 liv. donnera 649 liv. 5 ſ. pour la valeur de 53 louis d'or à 12 liv. 5 ſ. le louis d'or.

Pour ſçavoir combien il y a de pouces en 53 pieds, il faut multiplier 53 par 12. Ce qui ſe peut faire en multipliant 53 par 2, & le produit 106 par 6; ou bien en multipliant 53 par 3, & le produit 159 par 4. Mais cela ſe peut faire ſans multiplication, en écrivant 53 ſous 53, & encore une fois 53, en l'avançant d'une co-
53 lonne, en ſorte que le 3 réponde ſous le
53 5; car la ſomme de ces trois nombres
53 ainſi diſpoſés, donnera 636 pour le nombre
636 des pouces qui ſont compris en 53 pieds. C'eſt auſſi le nombre des deniers qui ſont compris en 53 ſols.

Pour multiplier enſemble deux nombres compoſés de pluſieurs figures, par exemple 12 & 18, on réduira le premier nombre 12 en ces trois parties compoſées chacune d'une ſeule figure, 2, 4, 6,

2 { 4 — 8 / 6 — 12 / 8 — 16 } & pareillement le ſecond nombre 18 en ces trois parties compoſées auſſi chacune d'une ſeule figure 4, 6, 8, dont chacune ſera multipliée par la premiere partie 2 du premier nombre; enſuite par la ſeconde figure 4 du même premier nombre; enfin par la troiſieme figure 6 du même premier nombre : la ſomme de tous les produits ſera celui qui doit provenir de la multiplication de 12 par 18, ou de 18 par 12.

4 { 4 — 16 / 6 — 24 / 8 — 32 }

6 { 4 — 24 / 6 — 36 / 8 — 48 }

ſomme 216

Multiplication par les doigts.

SI vous voulez multiplier 7 par 8, premierement prenez la différence de 7 à 10 qui eſt 3, & ayant levé les dix doigts des deux mains, abaiſſez trois doigts d'une main qui ſera, par exemple, la gauche. Secondement, prenez la différence de 8 à 10, qui eſt deux, & abaiſſez deux doigts de l'autre main qui ſera la droite. Troiſiemement, multipliez le nombre des doigts levés d'une main par le nombre des doigts levés de l'autre, le produit, qui eſt 6, ſera retenu pour être mis au rang des unités. Quatriemement, ajoutez le nombre des doigts abaiſſés des deux mains, & la ſomme qui eſt ici 5, doit être placée au rang des dixaines. Ainſi on trouvera que 7 multiplié par 8 produit 56.

On voit, par cet exemple, qu'il faut prendre la différence de 10 à chacun des deux nombres donnés, que le produit de ces deux différences, déſi-

gnées par les doigts levés de chaque main ; donnera le nombre des unités du produit total, & que la ſomme des doigts abaiſſés donnera les dixaines de ce produit total.

Autre multiplication abrégée.

SI l'on avoit un grand nombre à multiplier par un autre grand nombre, comme 453216 par 3289, il ſeroit bon de ſe ſervir de cette méthode que nous avons tirée de Langius. Je choiſis le plus petit de ces nombres 3289 pour le multiplicateur, & je fais une table à deux colonnes.

453216	1	453216
906432	2	3289
1359648	3	
1812864	4	4078944
2266080	5	3625728
2719296	6	906432
3172512	7	1359648
3625728	8	
4078944	9	1490627424

L'une de ces colonnes, qui eſt à droite, contient les premiers chiffres de la numération 1, 2, 3, &c. juſqu'au plus grand chiffre 9, qui ſe trouve dans le multiplicateur 3289 : ces chiffres ſont diſpoſés les uns ſous les autres, comme on le voit dans la table. L'autre colonne contient le nombre à multiplier 453216, qui eſt placé vis-à-vis de l'unité. On a mis le double de ce nombre vis-à-vis de 2, le triple vis-à-vis de 3, & ainſi de ſuite juſqu'au plus haut chiffre 9, qui eſt dans la ſeconde colonne.

Cette table étant ainſi faite, on diſpoſera le nombre à multiplier & le multiplicateur l'un ſous l'autre à l'ordinaire : comme le premier chiffre du multiplicateur eſt 9, on prendra le nombre qui lui répond dans la table, & on l'écrira au-deſſous des nombres donnés : le ſecond chiffre étant 8, on prendra le nombre qui lui correſpond dans la table, & on l'écrira au-deſſous du premier écrit, en obſervant de le reculer d'une place, parce que le 8 exprime des dixaines. On fera la même choſe à l'égard des autres chiffres qui ſe trouvent dans le multiplicateur. Enfin on fera l'addition de ces nombres ; la ſomme donnera le produit des deux nombres propoſés.

PROBLEME VII.

Diviſion abrégée.

POur diviſer un grand nombre par un plus petit, comme 1492862 par 432, il faudroit mettre, ſelon la méthode commune, le diviſeur 432 vers la gauche ſous 1492, pour ſçavoir combien de fois il y eſt contenu. Mais pour n'employer que l'addition & la ſouſtraction, faites un tarif du diviſeur 432 en le mettant vers la droite vis-à-vis de 1, & l'ajoutez à lui-même, pour avoir ſon double 864, que vous écrirez ſous 432 vis-à-vis de 2. Puis ajoutez le même nombre 432 à ſon double 864, pour avoir ſon triple 1296, que vous écrirez en bas vis-à-vis de 3. Ajoutez pareillement le même diviſeur 432 à ſon triple 1296, pour avoir ſon quadruple 1728, que vous écrirez deſſous vis-à-vis de 4, & ainſi des autres, en écrivant toujours les multiples du diviſeur 432, vis-à-vis des autres nombres 5, 6, 7, 8, 9, 10. Le der-

1	432	1492992	}
2	864	1296...	} 3456
3	1296		
4	1728	1969	
5	2160	1728	
6	2592		
7	3024	2419	
8	3456	2160	
9	3888		
10	4320	2592	
		2592	
		000	

hier 10 doit avoir vis-à-vis de lui le même diviſeur 432 augmenté d'un zero vers la droite, ſi le tarif eſt bien fait.

Cette préparation étant faite, pour ſçavoir tout d'un coup combien de fois le diviſeur 432 eſt contenu dans 1492, cherchez ce nombre dans le tarif, ou celui qui étant moindre, en approche le plus. C'eſt ici 1296, qui ſe trouvant à côté de 3, fait voir que 3 doit être la premiere figure du quotient. Si vous ôtez ce nombre 1296 de 1492, il reſtera 196. A ce reſte joignez vers la droite la figure 9 qui ſuit 1492 dans le dividende pour avoir 1969 que vous chercherez dans le tarif, ou celui qui étant moindre en approche le plus, & qui eſt ici 1728. Comme ce nombre ſe trouve à côté de 4, vous poſerez 4 pour la ſeconde figure du quotient. Enſuite vous ôterez ce nombre 1728 de 1969, & il reſtera 241. A ce reſte vous joindrez vers la droite la figure 9 qui ſuit 14929 dans le dividende, pour avoir 2419 que vous chercherez

dans le tarif, ou celui qui étant moindre, en approche le plus, & qui eſt ici 2160. Le nombre 5 qui eſt à côté du nombre 2160, ſera la troiſieme figure du quotient. On continuera à faire les mêmes opérations qu'on vient de faire, juſqu'à ce que la diviſion ſoit achevée.

Cette maniere eſt très-commode, quand on a pluſieurs grands nombres à diviſer par un même nombre, parce qu'ayant fait un tarif du diviſeur, il ſert pour faire toutes les diviſions dont on a beſoin. C'eſt ce qui arrive aux arpenteurs qui ont ſouvent de grands nombres à diviſer par 144, lorſqu'ils veulent réduire des pouces quarrés en pieds quarrés, ou par 1728, quand ils veulent réduire des pouces cubes en pieds cubes.

Pour diviſer un nombre quelconque par telle puiſſance qu'on voudra de 5, on le multipliera par une ſemblable puiſſance de 2. On retranchera du produit vers la droite autant de figures que le degré de la puiſſance contiendra d'unités. Les figures qui reſteront vers la gauche, ſeront le quotient, & celles qui auront été retranchées ſeront le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur ſera une ſemblable puiſſance de 10.

Comme pour diviſer 128 par 5, on retranchera le 6 qui eſt à la droite de 256, double de 128, & l'on aura $25\frac{6}{10}$ pour le quotient. Pour diviſer le meme nombre 128 par 25, quarré de 5, on retranchera les deux dernieres figures 12 qui ſont à la droite de 512, quadruple de 128, & l'on aura $5\frac{12}{100}$ pour le quotient. Ainſi des autres.

Pour diviſer un nombre quelconque par un plus petit, qui ſoit produit par la multiplication de deux autres plus petits, on diviſera le nombre pro-

poſé par l'un de ces deux plus petits nombres, & le quotient ſera diviſé par l'autre nombre. Le ſecond quotient ſera celui qu'on cherche.

Comme pour diviſer 20736 par 24, qui eſt produit par la multiplication de ces deux nombres 3, 8, auſſi-bien que de ces deux, 4, 6, on prendra la huitieme partie de ſon tiers, ou la ſixieme partie de ſon quart : ou bien, ce qui eſt la même choſe, on prendra le tiers de ſa huitieme partie, ou le quart de ſa ſixieme partie, & l'on aura 864 pour le quotient cherché.

D'où il ſuit que pour réduire en toiſes quarrées des pieds quarrés, on doit prendre la ſixieme partie de la ſixieme partie du nombre propoſé des pieds quarrés, parce qu'une toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés, & que 6 fois 6 font 36. Ainſi pour réduire en toiſes quarrées 20736 pieds quarrés, on prendra la ſixieme partie de la ſixieme partie 3456 de 20736, & l'on aura 576 pour le nombre des toiſes quarrées qui ſont contenues en 20736 pieds quarrés. Pareillement, pour réduire en toiſes quarrées 542 pieds quarrés, on prendra la ſixieme partie de la ſixieme partie 90 $\frac{1}{2}$ de 542, & l'on aura 15 toiſes quarrées & 2 pieds quarrés pour la valeur de 542 pieds quarrés.

PROBLEME VIII.

De quelques propriétés des nombres.

I.

LE nombre 9 eſt tel que, s'il multiplie un nombre entier quelconque, la ſomme des figures du produit eſt diviſible par le même nombre 9 ſans reſte. Si on multiplie, par exemple, 53 par 9, & qu'on

qu'on ajoute enſemble les figures du produit 477, la ſomme 18 eſt exactement diviſible par 9.

II.

Si l'on prend deux nombres quelconques, l'un des deux, ou leur ſomme, ou leur différence eſt diviſible par 3. Soient pris les deux nombres 6, 5, le premier 6 eſt diviſible par 3. Si on choiſit les deux nombres 11, 5, leur différence 6 eſt diviſible par 3. Enfin ſi on prend les deux nombres 7, 5, leur ſomme eſt diviſible par 3.

III.

On peut diviſer par 6 le produit de deux nombres dont les quarrés ajoutés enſemble font un nombre quarré; ainſi 12, produit de ces deux nombres 3, 4, dont les quarrés 9, 16, ajoutés enſemble, font le nombre quarré 25, dont le côté eſt 5, eſt diviſible par 6.

Pour trouver deux nombres dont les quarrés faſſent enſemble un nombre quarré, multipliez deux nombres quelconques. Le double de leur produit ſera l'un des deux nombres qu'on cherche, & la différence de leurs quarrés ſera l'autre nombre.

Comme ſi l'on multiplie ces deux nombres 2, 3, dont les quarrés ſont 4, 9, le produit ſera 6, dont le double 12, & la différence 5 des quarrés 4, 9, ſont deux nombres tels que leurs quarrés 144, 25, font enſemble ce nombre quarré 169, dont le côté eſt 13. *Voyez les problêmes 9 & 10.*

IV.

La ſomme & la différence de deux nombres quelconques, dont les quarrés different d'un nom-

bre quarré, ſont chacune ou un nombre quarré, ou la moitié d'un nombre quarré.

Ainſi 16, ſomme des deux nombres 6, 10, dont les quarrés 36, 100, different du nombre quarré 64, qui a 8 pour racine quarrée, & leur différence 4, ſont chacune un nombre quarré. De même 18, ſomme des deux nombres 8, 10, dont les quarrés 64, 100, different du nombre quarré 36, qui a 6 pour racine, & leur différence 2, ſont les moitiés de ces deux nombres quarrés 36, 4.

Pour trouver deux nombres dont la ſomme & la différence ſoient chacune un nombre quarré, auquel cas les quarrés de ces deux nombres différeront auſſi d'un nombre quarré; choiſiſſez deux nombres à volonté, comme 2, 3, dont le produit eſt 6, & dont les quarrés ſont 4, 9. La ſomme 13 de ces deux quarrés, & le double 12 du produit 6, ſont les deux nombres qu'on cherche. Car leur ſomme 25, & leur différence 1, ſont chacun un nombre quarré: de plus leurs quarrés 169, 144, different enſemble du nombre quarré 25, qui a 5 pour racine quarrée.

Pour trouver deux nombres dont la ſomme & la différence ſoient chacune la moitié ou le double d'un nombre quarré, auquel cas leurs quarrés différeront auſſi d'un nombre quarré; choiſiſſez à volonté deux nombres, comme 2, 3, dont les quarrés ſont 4, 9. La ſomme 13 de ces deux quarrés, & leur différence 5 ſont les deux nombres qu'on cherche. Car leur ſomme 18, & leur différence 8 ſont les moitiés de ces deux nombres quarrés 36, 16, ou les doubles de ces deux autres nombres quarrés 9, 4: de plus leurs quarrés 169, 25, different de ce nombre quarré 144, qui a 12 pour racine quarrée.

V.

Tout nombre quarré finit par deux zeros, ou par l'une de ces cinq figures, 1, 4, 5, 6, 9. Cette propoſition ſert *à faire connoître quand un nombre propoſé n'eſt point quarré* : c'eſt lorſqu'il ne finit ni par deux zeros, ni par quelqu'une des cinq figures précédentes. Quand même il finiroit par deux zeros, on peut aſſurer qu'il n'eſt point quarré, lorſque ces deux zeros ne ſont pas précédés de quelqu'une des cinq figures précédentes.

VI.

Toute fraction quarrée, c'eſt-à-dire, qui a ſa racine quarrée, eſt telle que le produit du numérateur par le dénominateur a ſa racine quarrée. Cette propoſition ſert *à faire connoître quand une fraction propoſée eſt quarrée* : c'eſt lorſqu'en multipliant le numérateur par le dénominateur, le produit eſt un nombre quarré.

Ainſi l'on connoît que cette fraction $\frac{28}{63}$ eſt quarrée, parce qu'en multipliant le numérateur 28 par le denominateur 63, le produit 1764 eſt un nombre quarré, dont le côté eſt 42; alors la racine quarrée de la fraction propoſée $\frac{28}{63}$ ſera $\frac{42}{63}$, en retenant le même dénominateur 63, ou bien $\frac{28}{42}$, en retenant le même numérateur 28. Car l'une & l'autre de ces deux fractions $\frac{28}{42}$, $\frac{42}{63}$, eſt égale à $\frac{2}{3}$, qui eſt la racine quarrée de la fraction propoſée $\frac{28}{63}$ ou $\frac{4}{9}$.

VII.

Toute fraction cubique, c'eſt-à dire, qui a ſa racine cubique, eſt telle qu'en multipliant le numérateur par le quarré du dénominateur, ou le dénominateur par le quarré du numérateur, le

produit a ſa racine cubique. Cette propoſition ſert à *faire connoître quand une fraction propoſée eſt cubique :* c'eſt lorſqu'en multipliant le numérateur par le dénominateur, ou le dénominateur par le numérateur, le produit eſt un nombre cubique.

Ainſi l'on connoît que cette fraction $\frac{24}{375}$ eſt cubique, parce qu'en multipliant le numérateur 24 par le quarré 140625 du dénominateur 375, le produit 3375000 a ſa racine cubique 150; ou bien parce qu'en multipliant le dénominateur 375 par le quarré 576 du numérateur 24, le produit 216000 a 60 pour racine cubique : alors la racine cubique de la fraction propoſée $\frac{24}{375}$ ſera $\frac{150}{375}$ en retenant le même dénominateur 375; ou bien $\frac{24}{60}$ en retenant le même numérateur 24. Car l'une & l'autre de ces deux fractions $\frac{150}{375}$, $\frac{24}{60}$, eſt égale à $\frac{2}{5}$ qui eſt la racine cubique de la fraction propoſée $\frac{24}{375}$, ou $\frac{8}{125}$.

VIII.

Quoiqu'il ne ſoit pas poſſible de trouver deux puiſſances homogenes, dont la ſomme & la différence ſoient chacune une ſemblable puiſſance, comme deux quarrés dont la ſomme & la différence ſoient chacune un nombre quarré, ou deux cubes dont la ſomme & la différence ſoient chacune un nombre cubique; néanmoins il eſt poſſible & même très-facile de *trouver deux nombres triangulaires, dont la ſomme & la différence ſoient chacun un nombre triangulaire.*

Voici deux nombres triangulaires 15, 21, dont les côtés ſont 5 & 6 : leur ſomme 36, & leur différence 6, ſont auſſi des nombres triangulaires, dont les côtés ſont 8 & 3. Voici encore deux autres

nombres triangulaires 780, 990, dont les côtés ſont 39 & 44 : leur ſomme 1770, & leur différence 210, ſont auſſi des nombres triangulaires, dont les côtés ſont 59, 20. Si vous voulez encore deux autres nombres triangulaires, les voici ; 1747515, 2185095, dont les côtés ſont 1869, 2090 : leur ſomme 3932610, & leur différence 437580, ſont auſſi des nombres triangulaires, dont les côtés ſont 2804, 935.

On appelle *nombre triangulaire* celui qui provient de la ſomme de quelques-uns des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. pris de ſuite en commençant par l'unité. On peut en prendre autant qu'on voudra, & le dernier de ceux qui ſeront pris, & qui ſera le plus grand, eſt appellé le *côté* du nombre triangulaire. Ainſi l'on connoît que ce nombre 10 eſt triangulaire, & que ſon côté eſt 4, parce qu'il eſt égal à la ſomme des quatre premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, dont le dernier & plus grand eſt 4. Il a été appellé *triangulaire*, parce que l'on peut diſpoſer 10 points en forme de triangle équilatéral, dont chaque côté en comprend 4 ; ce qui a fait dire que 4 étoit le côté du nombre triangulaire 10.

De même 21 eſt un nombre triangulaire, & ſon côté eſt 6, parce qu'il eſt égal à la ſomme des 6 premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont le dernier & le plus grand eſt 6. Ces nombres 55, 78 ſont des nombres triangulaires. Conſultez le traité du triangle arithmétique par M. Paſcal.

Pour connoître ſi un nombre propoſé eſt triangulaire, il faut le multiplier par 8, & ajouter 1 au produit ; ſi cette ſomme a une racine quarrée, le nombre propoſé ſera triangulaire. Ainſi l'on con-

noît que ce nombre 10 eſt triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 80 étant augmenté de 1, la ſomme 81 a pour racine quarrée 9. On connoît auſſi que ce nombre 3932610 eſt triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 31460880 étant augmenté de 1, la ſomme 31460881 eſt un nombre quarré, dont la racine eſt 5609.

Pour avoir le côté d'un nombre triangulaire, il faut prendre la plus petite moitié de la racine trouvée. Ainſi pour avoir le côté du nombre triangulaire 10, prenez 4, la plus petite moitié de 9, racine trouvée, & 4 ſera le côté de 10. De même pour avoir le côté du nombre triangulaire 3932610, prenez la plus petite moitié de 5609, racine trouvée, & 2804 ſera le côté du nombre triangulaire propoſé.

IX.

La différence de deux puiſſances homogenes, comme de deux nombres quarrés, de deux nombres cubiques &c. eſt diviſible par la différence de leur côtés. La différence 21 de ces deux quarrés 25, 4, dont les côtés ſont 5, 2, eſt diviſible par 3, différence de ces côtés; & le quotient 7 eſt égal à la ſomme des mêmes côtés. La différence 117 des deux cubes 125, 8, dont les côtés ſont 5, 2, eſt diviſible par 3, différence de ces côtés, & le quotient 39 eſt égal à la ſomme de 10, produit des côtés 5, 2, & de 29, ſomme de leurs quarrés 25, 4.

X.

La différence de deux puiſſances homogenes,

dont l'expoſant commun eſt un nombre pair, eſt diviſible par la ſomme de leurs côtés. La différence 21 de ces deux quarrés 25, 4, dont les côtés ſont 5, 2, eſt diviſible par 7, ſomme de ces côtés, & le quotient 3 eſt égal à la différence des mêmes côtés. La différence 609 des deux quarrés-quarrés 625, 16, dont les côtés ſont 5, 2, eſt diviſible par 7, ſomme de ces côtés, & le quotient 87 eſt égal au produit ſous la différence 3 des mêmes côtés 5, 2, & la ſomme 29 de leurs quarrés 15, 4.

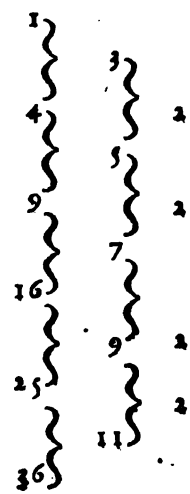
XI.

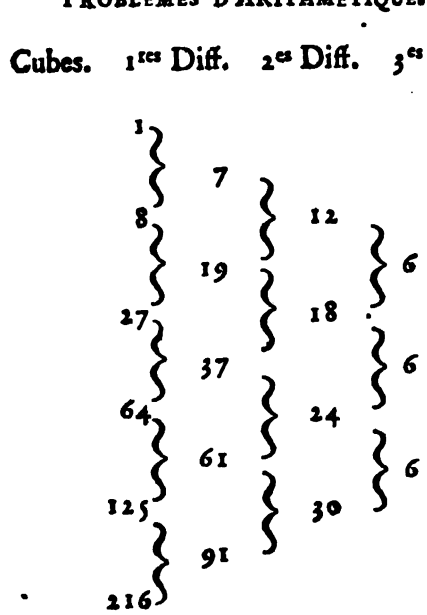
La ſomme de deux puiſſances homogenes, dont l'expoſant commun eſt un nombre impair, eſt diviſible par la ſomme de leurs côtés. La ſomme 133 des deux cubes 125, 8, dont les côtés ſont 5, 2, eſt diviſible par la ſomme 7 de ces côtés; & le quotient 19 eſt égal à l'excès de 29, ſomme des quarrés 25, 4, des côtés 5, 2, ſur le produit 10 des même côtés. La ſomme 3157 des deux ſurſolides 3125, 32, dont les côtés ſont 5, 2, eſt diviſible par la ſomme 7 de ces côtés; & le quotient 451 eſt égal à l'excès de la ſomme 741 des quarrés-quarrés 625, 16, des deux côtés, 5, 2, & du quarré 100, produit de 10 ſous les mêmes côtés, ſur le produit 290 ſous la ſomme 29 des quarrés 25, 4, des côtés 5, 2, & le produit 10 des mêmes côtés.

XII.

Toutes les puiſſances des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ont autant de différences que leurs expoſans contiennent d'unités, les dernieres

différences étant toujours égales entre elles dans chaque puiſſance; ſçavoir, les ſecondes différences, c'eſt-à-dire, les différences des différences dans les quarrés, 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. car ces ſecondes différences ſont 2, les premieres étant les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, &c. Les troiſiemes différences, c'eſt-à-dire, les différences des différences des premieres différences dans les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. car ces troiſiemes différences ſont 6, les premieres étant 7, 19, 37, 61, 91, &c, & les ſecondes, ou les différences de ces différences étant 12, 18, 24, 30, &c. qui ſe ſurpaſſent de 6, qui eſt leur troiſieme différence. Ainſi des autres.





Il arrive la même choſe aux nombres *polygones*, qui ſe forment par une continuelle addition des nombres en progreſſion arithmétique qu'on appelle *gnomons*, dont le premier eſt l'unité, qui eſt virtuellement nombre polygone de toute eſpece; aux nombres *piramidaux*, qui ſont formés par l'addition continuelle des nombres polygones conſidérés comme des gnomons, dont le premier eſt toujours l'unité; & aux nombres *piramido-piramidaux*, qui ſont formés par l'addition continuelle des nombres pyramidaux conſidérés comme des gnomons, dont le premier eſt toujours l'unité.

Lorſque les gnomons ſe ſurpaſſent de l'unité, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. les nombres

ajouté à lui-même, faſſe le même nombre qu'étant multiplié par lui-même, ſçavoir 4. Car tout autre nombre, comme 5, étant ajouté à lui-même, fait 10, & étant multiplié par lui-même fait 25.

Quoiqu'on ne puiſſe pas trouver deux nombres entiers dont la ſomme ſoit égale à leur produit, on peut néanmoins en *trouver aiſément deux en fractions, & même en raiſon donnée, dont la ſomme ſoit égale à leur produit.* C'eſt en diviſant la ſomme des deux termes de la raiſon donnée, par chacun de ces deux termes. Si l'on veut, par exemple, leur donner la raiſon de 2 à 3, on diviſera ſéparément leur ſomme 5 par 2 & par 3, & l'on aura ces deux nombres $2\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, qui ajoutés font autant que multipliés enſemble, ſçavoir, $4\frac{1}{6}$.

XV.

Un nombre quelconque eſt la moitié de la ſomme de deux autres également éloignés de lui, l'un par défaut, & l'autre par excès: par exemple, 6 eſt la moitié de la ſomme 12 des deux nombres 5 & 7, qui en ſont egalement éloignés, ou des deux nombres 4 & 8, qui en ſont auſſi également éloignés, &c.

XVI.

Le nombre 37 eſt tel, qu'étant multiplié par chacun de ces nombres 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, qui ſont en progreſſion arithmétique, tous les produits ſont compoſés de trois figures ſemblables.

37	37	37	37	37	37	37	37	37
3	6	9	12	15	18	21	24	27
111	222	333	444	555	666	777	888	999

XVII.

Les deux nombres 5 & 6 ſont appellés *ſphériques*, parce que leurs puiſſances finiſſent par les mêmes nombres. Par exemple, les puiſſances de 5, ſçavoir 25, 125, 625, &c. finiſſent par le même nombre 5. De même, les puiſſances de 6; ſçavoir 36, 216, 1296, &c. finiſſent par le même nombre 6.

Le nombre 5 a cela de particulier, qu'étant multiplié par un nombre pair, comme par 8, le produit 40 ſe termine par un zero.

L'autre nombre 6 a cela auſſi de particulier, qu'il eſt le premier des nombres qu'on appelle *parfaits*, parce qu'ils ſont égaux à la ſomme de leurs parties aliquotes; car ce nombre 6 eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes, 1, 2, 3. Le nombre 28 eſt auſſi un nombre parfait, parce qu'il eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes 1, 2, 4, 7, 14.

Pour trouver autant de nombres parfaits qu'on voudra, il faut ſe ſervir de la progreſſion double, dont le premier terme ſoit 2, & non pas l'unité, en écrire les termes de ſuite, & les ſéparer de deux en deux, avec cette précaution, que le ſecond terme 4 ſera répété dans la ſeconde ſéparation, & y tiendra la premiere place, après avoir tenu la ſeconde place dans la premiere ſéparation, comme vous le voyez ici. Ces termes étant ainſi ſéparés,

2, 4	4, 8	16, 32	64, 128
6	28	496	8128
3 par 2	7 par 4	31 par 16	127 par 64

256, 512	1024, 2048	&c.
130816	209628	&c.

on les prendra deux à deux dans leurs ſéparations, & après avoir diminué de l'unité celui qui tient la ſeconde place dans chaque ſéparation, on les multipliera par celui qui tient la premier place dans la même ſéparation ; le produit ſera un nombre parfait. Ainſi pour avoir le premier nombre parfait, on conſidérera que la premiere ſéparation contient ces deux termes 2, 4 ; on ôtera 1 de 4, & l'on multipliera le reſte 3 par 2, le produit 6 eſt le premier nombre parfait. De même pour avoir le ſecond nombre parfait, on conſidérera que la ſeconde ſéparation contient ces deux termes 4, 8, on ôtera 1 de 8, & l'on multipliera le reſte 7 par 4 ; le produit 28 ſera le ſecond nombre parfait ; on multipliera enſuite 31 par 16 pour avoir le troiſieme nombre parfait ; & ainſi des autres.

REMARQUE.

Les nombres parfaits ſont ſi rares, qu'il ne s'en trouve qu'un depuis un juſqu'à dix, un depuis dix juſqu'à cent, un depuis cent juſqu'à mille, un depuis mille juſqu'à dix mille, un depuis dix mille juſqu'à cent mille, &c. De plus il eſt à remarquer que tous les nombres parfaits ont alternativement pour leur derniere figure 6 & 8.

Pour trouver toutes les parties aliquotes, ou tous les diviſeurs d'un nombre, il faut diviſer ce nombre & ſes quotiens par les nombres premiers, juſqu'à ce que le dernier quotient ſoit l'unité. Enſuite on multipliera ces diviſeurs premierement trouvés, de

la maniere qu'on l'enſeignera, pour avoir tous les autres.

Soit propoſé le nombre 210, dont on veut avoir tous les diviſeurs, ou toutes les parties aliquotes. Diviſez 210 par 2, il viendra au quotient

210	105	35	7	1
2	3	5	7	

105, que vous diviſerez par 3; puis vous diviſerez le ſecond quotient 35 par 5, qui donnera 7 pour troiſieme quotient, lequel n'a point d'autre diviſeur que lui-même; & le quotient eſt l'unité.

Diſpoſez tous ces diviſeurs de la maniere que vous le voyez dans la table ſuivante, en commençant par le nombre 2; mettez enſuite le nombre 3 au-deſſous, mais rangé un peu à côté. Vous

		2		
		3.	6.	
	5.	10.	15.	30.
7,	14.	21.	42.	35. 70. 105. 210.

multiplierez ces deux nombres 2, 3, & vous écrirez le produit 6 à coté de 3, & dans le même rang, comme vous le voyez. Ces nombres 2, 3, 6, ſeront des diviſeurs de 210. Puis mettez le nombre 5, troiſieme diviſeur, au-deſſous & un peu à côté, multipliez le par tous les diviſeurs déja trouvés, & vous aurez pour diviſeurs nouveaux 10, 15, 30. Enfin poſez le nombre 7 au deſſous & un peu à côté; multipliez-le par tous les diviſeurs déja trouvés, & vous aurez encore pour diviſeurs

14, 21, 42, 35, 70, 105, 210. Tous ces nombres pris pour diviſeurs, ou trouvés dans les deux tables précédentes, joints à l'unité, ſeront les diviſeurs cherchés, & les parties aliquotes cherchées, ſi on en retranche le nombre propoſé 210.

On a diſpoſé les deux tables précédentes & les ſuivantes, comme on le voit, pour donner plus de lumiere dans une opération qui eſt aſſez abſtraite d'elle-même.

Si vous voulez trouver tous les diviſeurs, ou les parties aliquotes de 2032, diviſez d'abord ce nombre par 2, premier nombre premier, & tous les quotients qui peuvent l'être, comme vous le voyez dans la table ſuivante. Le dernier quotient

2032	1016	508	254	127	1
2	2	2	2	127	

127 étant nombre premier ne peut être diviſé que par lui-même, & il a pour quotient l'unité.

Diſpoſez tous ces diviſeurs de la maniere que vous le voyez dans la table ſuivante, pour trouver les autres. Après avoir mis le premier diviſeur 2, mettez le même 2, qui eſt ſecond diviſeur, au-deſſous, & à côté multipliez ces deux diviſeurs 2, 2, & vous aurez 4, que vous rangerez à côté comme dans cette table. Poſez encore 2 au-deſ-

				2.
				2. 4.
				2. 8.
				2. 16.
127.	254.	508.	1016.	2032.

ſous

ſous : ſuivant la regle précédente il faudroit multiplier tous les diviſeurs trouvés par ce troiſieme diviſeur 2 ; mais il eſt inutile de multiplier 2 par 2, qui donneroit encore 4 déja trouvé ; ainſi on néglige cette multiplication, & on multiplie ſeulement 4 par 2, pour avoir 8, qui eſt un nouveau diviſeur.

Enſuite vous écrirez au deſſous pour la quatrieme fois le diviſeur 2, & vous vous contenterez de multiplier 8 par ce nombre 2 : ce qui donne 16 ; car il eſt inutile de multiplier tous les 2 précédens, puiſqu'ils donneroient pour produits 4, qui a déja été trouvé. (On obſervera la même choſe à l'égard des autres nombres, dont la multiplication ne donneroit point de nouveau diviſeur).

Enfin vous poſerez 127 au deſſous des diviſeurs, & à côté, vous multiplierez ce nombre une fois ſeulement par 2, & par tous les autres diviſeurs trouvés, & vous aurez 254, 508, 1016, 2032. Tous ces nombres pris pour diviſeurs, ou trouvés dans la table précédente, ſeront les diviſeurs cherchés, & les parties aliquotes cherchées, ſi on en retranche le nombre propoſé 2032.

On peut s'exercer ſur les nombres 8128 & 2096128, qui ſont des nombres parfaits. On remarquera que toutes les puiſſances de 2 priſes autant de fois que 2 eſt diviſeur, ſont des diviſeurs & parties aliquotes de ces deux nombres, & que la ſomme de ces puiſſances & de l'unité eſt égale au dernier nombre premier, qui ſe trouve être 127 dans 8128, & 2047 dans 2096128.

Autre maniere de trouver les parties aliquotes, ou tous les diviſeurs d'un nombre propoſé.

Soit propoſé le nombre 8128, l'unité eſt tou-

jours un diviſeur de quelque nombre que ce ſoit ? ainſi vous la mettrez à la tête d'une premiere colonne, qui contiendra une partie des parties aliquotes ou diviſeurs. Diviſez enſuite ce même nombre 8128, par le plus petit nombre qui ſe préſentera, ſçavoir par 2, que l'on peut connoître aiſément, parce que le nombre propoſé 8128 eſt pair, & le quotient ſera 4064, que vous écrirez à la droite, vis-à-vis le 2 dans une ſeconde colonne, pour ſecond diviſeur, qui ſe peut encore diviſer par le premier diviſeur 2; ce qui fait que ſon quarré 4 ſera auſſi un diviſeur, que vous écrirez au-deſſous de ſon côté 2, & vis-à-vis le ſecond quotient 2032 pour un autre diviſeur, qui ſe peut encore diviſer par le premier diviſeur 2, ce qui fait ſon cube 8 qui ſera auſſi un diviſeur, que vous écrirez au-deſſous du quarré 4, & vis-à vis le troiſieme quotient 1016 pour un autre diviſeur, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à un dernier diviſeur, qui ne ſe puiſſe plus diviſer par le premier 2, comme il arrive au ſixieme quotient 127, qui étant un nombre premier, fait connoître que tous les diviſeurs du nombre propoſé 8128 ſont trouvés, où vous voyez que leur ſomme eſt égale à ce nombre, & que par conſéquent il eſt parfait.

1	
2	4064
4	2032
8	1016
16	508
32	254
64	127
127	——
	8001
	127
	——
	8128

C'eſt de la même façon que nous avons trouvé tous les diviſeurs de cet autre nombre 2096128, qui eſt auſſi parfait, parce qu'il eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes : où l'on voit que le dernier

quotient 2047, qui répond à la dixieme puiſſance 1024 du premier diviſeur 2, eſt auſſi un nombre

1	
2	1048064
4	524032
8	262016
16	131008
32	65504
64	32752
128	16376
256	8188
512	4094
1024	2047
2047	2094081
	2047
	2096128

premier : car s'il avoit pu être diviſé par quelque autre nombre que par 2, comme par 3, il auroit fallu multiplier par ce nouveau diviſeur 3, toutes les puiſſances du premier diviſeur 2, & diviſer le nombre propoſé & tous les quotiens par ce même nouveau diviſeur 3, pour avoir d'autres diviſeurs, &c, comme vous allez voir dans l'exemple ſuivant.

XVIII.

Le nombre 120 eſt égal à la moitié de la ſomme 240 de ſes parties aliquotes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60. Le nombre 672 eſt auſſi égal à la moitié de la ſomme 344 de ſes parties aliquotes, que nous avons

trouvées par une méthode ſemblable à la précédente, ſans qu'il ſoit beſoin de la répéter davantage. On peut trouver une infinité d'autres nombres qui auront la même propriété : on peut même en trouver d'autres qui ſeront la troiſieme partie, ou telle autre partie qu'on voudra de la ſomme de leurs parties aliquotes ; mais ce n'eſt pas ici le lieu d'en dire davantage.

1	
2	336
4	168
8	84
16	42
32	21
3	224
6	112
12	56
24	28
48	14
96	7
252	1092
	252
	1344

XIX.

Ces deux nombres 220, 284, ſont appellés *amiables*, parce que le premier 220 eſt égal à la ſomme des parties aliquotes 1, 2, 4, 71, 142, du ſecond 284 ; & réciproquement le ſecond 284, eſt égal à la ſomme des parties aliquotes, 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 du premier 220. Ces parties aliquotes ſont faciles à trouver par ce qui a été enſeigné auparavant.

Pour trouver tous les nombres amiables par ordre, ſervez-vous du nombre 2, qui eſt tel que ſi de ſon triple 6, de ſon ſextuple 12, & de l'octodecuple 72 de ſon quarré 4, on ôte l'unité, il reſte ces trois nombres premiers 5, 11, 71, dont les deux premiers 5, 11, étant multipliés enſemble, & leur produit 55 étant multiplié par le double 4 du nombre 2, ce ſecond produit 220 ſera le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour

avoir l'autre qui eſt 284, on multipliera le troiſieme nombre premier 71 par le même double 4 du nombre 2 pris au commencement.

1	2	4
3	6	18
6	12	72
1	1	1
5	11	71
	5	4
	55	284
	4	
	220	

Pour trouver deux autres nombres amiables, au lieu de 2, ſervez-vous d'une de ſes puiſſances qui

8	8	64
3	6	18
24	48	1152
1	1	1
23	47	1151
	23	16
	1081	18416
	16	
	17296	

ait la même propriété, tel qu'eſt ſon cube 8. Car

ſi de ſon triple 24, de ſon ſextuple 48, & de l'octodécuple 1152 de ſon quarré 64, on ôte l'unité, il reſte ces trois nombres premiers 23, 47, 1151, dont les deux premiers 23, 47, doivent être multipliés enſemble, & leur produit 1081 doit être encore multiplié par le double 16 du cube 8, afin d'avoir 17296 pour le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour avoir l'autre, qui eſt 18416, on multipliera le troiſieme nombre premier 1151 par le même double 16 du cube 8.

Si vous voulez deux autres nombres, au lieu de deux, ou de ſon cube 8, ſervez-vous de ſon quarré-cube 64, qui a la même propriété. Car ſi de ſon triple 192, de ſon ſextuple 384, & de l'octodécuple 73728 de ſon quarré 4096, on ôte l'unité, il reſte ces trois nombres premiers 191, 383, 73727, par le moyen deſquels, & par ce qui a été dit auparavant, on trouvera ces deux autres nom-

64	64	4096
3	6	18
192	384	73728
1	1	1
191	383	73727
	191	128
	73153	9437056
	128	
	9363584	

bres 9363584, 9437056, qui ſont amiables, ainſi des autres. Conſultez ce qui a été dit ſur le

parties aliquotes au livre troiſieme des nouveaux élémens d'algebre, tant dans les problêmes, que dans les queſtions. Conſultez auſſi Schooten dans ſes *ſectiones miſcellanea.*

Regle générale pour trouver tant de nombres amiables qu'on voudra.

FAites une table qui contiendra pluſieurs rangs de nombres. Commencez par le ſecond de ces rangs, qui doit contenir la progreſſion double *, dont le premier terme ſera 2. Triplez les termes de cette progreſſion; ces nombres triples 6, 12 24, &c, placés chacun ſous celui dont il eſt formé, compoſeront le troiſieme rang. Ces nombres diminués de l'unité 5, 11, 23, &c, & placés chacun au-deſſus du terme qui lui répond, compoſeront le premier rang. Enfin l'on aura les termes du quatrieme rang 71, 287, &c, en multipliant 12, ſecond terme du troiſieme rang, par 6, premier terme de ce même rang; le produit 72 diminué de l'unité, qui eſt 71, ſera le premier terme du quatrieme rang, & on le placera ſous 12. On multipliera enſuite 24, troiſieme terme, par le précédent 12; & le produit 288 diminué de l'unité qui eſt 287, ſera le ſecond terme du quatrieme rang. On trouvera les autres termes par la même mé-

*Voyez le prob. II.

5	11	23	47	95	191
2	4	8	16	32	64
6	12	24	48	96	192
	71	287	1151	4607	18431

thode, c'eſt-à-dire, en multipliant un terme du troiſieme rang par celui qui le précede immédiate-

ment dans ce même rang, & en plaçant le produit diminué de l'unité au deſſous du terme qu'on a choiſi dans le troiſieme rang, pour le multiplier avec le précédent.

Cette table étant ainſi conſtruite, on choiſira trois nombres premiers, dont l'un ſera pris dans le quatrieme rang; les autres ſeront pris dans le premier rang : l'un de ceux-ci doit répondre au nombre premier choiſi du quatrieme rang, c'eſt-à-dire, celui qui eſt placé dans le premier rang au deſſus du nombre premier choiſi dans le quatrieme rang : l'autre ſera celui qui précede immédiatement dans le premier rang le ſecond dont on vient de parler. Par exemple, ſi l'on choiſit dans le quatrieme rang le nombre 71, celui qui lui répond dans le premier rang eſt 11, & 5 eſt celui qui précede immédiatement 11; ces nombres 5 & 11 étant nombres premiers, ſeront les termes avec leſquels on trouvera deux nombres *amiables*, en ſuivant ce qu'on va dire. Multipliez 71 par 4, terme qui lui répond dans le ſecond rang; le produit 284, eſt l'un de ces nombres amiables. Multipliez auſſi 11 par le même terme 4, qui lui répond dans le ſecond rang, & le produit 44 par 5, terme qui précede immédiatement 11 dans le premier rang; ce ſecond produit 220 ſera l'autre des nombres amiables que l'on cherche. On trouvera d'autres nombres amiables, en ſuivant la même méthode.

REMARQUE.

Si on choiſiſſoit 4607 dans la quatrieme rang pour un des nombres premiers, on trouveroit que 95, qui lui répond dans le premier rang, n'eſt point un nombre premier : ainſi on ne pourroit

point ſe ſervir de ce terme pour choiſir des nombres amiables.

Comme il eſt difficile de connoître ſi un nombre eſt premier, quand il eſt un peu grand, nous ajouterons à la fin de ce problême une table de tous les nombres premiers, qui ſont compris entre 1 & 10000.

X X.

Les quarrés 961, 1156, des deux nombres 31, 34, ſont tels que le premier 961 avec ſes parties aliquotes 1, 31, fait une ſomme 993 égale à la ſomme des parties aliquotes, 1, 2, 4, 17, 34, 68, 289, 578, du ſecond 1156 dont le côté eſt 34.

XXI.

Les deux nombres ſuivans 26, 20, ſont tels que chacun avec ſes parties aliquotes fait une même ſomme. Car le premier 26 avec ſes parties aliquotes 1, 2, 13, fait 42, & le ſecond 20 avec ſes parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 10, fait auſſi 42.

Il arrive la même choſe aux deux nombres 488, 464, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 930 : aux deux nombres 11, 6, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 12 : & aux deux nombres 17, 10, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 18.

On peut même avoir trois nombres, dont chacun avec ſes parties aliquotes fera une même ſomme, comme 20, 26, 41, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 42 ; 23, 14, 15, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 24 ; & 46, 55, 71, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 72.

Ces deux quarrés 106276, 165649 ont pour racine 326, 407. La ſomme des diviſeurs de cha-

cun eſt 187131. Les diviſeurs de 106276 ſont : 1, 2, 4, 163, 326, 652, 26569, 53138, 106276. Ceux de 165649 ſont 1, 11, 37, 121, 407, 1369, 4477, 15059, 165649.

Ces deux quarrés 16, 25, ſont auſſi tels que la ſomme des diviſeurs de chacun eſt 31. Les diviſeurs de 16 ſont 1, 2, 4, 8, 16. Ceux de 25 ſont 1, 5, 25 : ainſi chacun avec leurs parties aliquotes fait 21.

Par le moyen de ces deux derniers quarrés 16, 25, on en peut avoir autant d'autres qu'on voudra qui ayent la même propriété. Il ne faut que les multiplier par quelqu'autre nombre quarré impair qui ne ſoit pas diviſible par 5. Comme ſi on les multiplie chacun par 9, on aura ces deux autres nombres quarrés 144, 225, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 403 ; ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme des diviſeurs eſt 403.

XXII.

Le nombre quarré 81, dont la racine eſt 9, eſt tel qu'avec ſes parties aliquotes 1, 3, 9, 27, il fait ce nombre quarré 121, dont la racine eſt 11. Le nombre quarré 400, dont la racine eſt 20, eſt auſſi tel, qu'avec ſes parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, il fait ce nombre quarré 961, dont la racine eſt 31.

XXIII.

La ſomme 666 de ces trois nombres triangulaires 15, 21, 630, dont les côtés ſont 5, 6, 35, eſt auſſi un nombre triangulaire dont le côté eſt 36. Il arrive la même choſe à ces trois autres

nombres triangulaires 210, 780, 1711, dont les côtés ſont 20, 39 58. Car leur ſomme 2701 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 73. La ſomme 9180 de ces trois autres nombres triangulaires 666, 2628, 5886, dont les côtés ſont 36, 72, 108, eſt auſſi un nombre triangulaire, dont le côté eſt 135, &c.

XXIV.

Le quarré 49 du nombre 7, eſt tel que la ſomme 8 de ſes parties aliquotes 1, 7, a pour racine cubique 2. Et le cube 343 du même nombre 7, eſt tel qu'avec ſes parties aliquotes 1, 7, 49, il fait ce nombre quarré 400, dont le côtés eſt 20.

XXV.

Le quarré 9 du nombre 3, eſt tel que la ſomme 4 de ſes parties aliquotes 1, 3, eſt un nombre quarré, dont le côté eſt 2. Le quarré 2401 du nombre 49, a la même propriété. Car la ſomme 400 de ſes parties aliquotes 1, 7, 49, 343, eſt un nombre quarré dont la racine eſt 20.

XXVI.

Les deux nombres 99, 63, ſont tels que la ſomme 57 des parties aliquotes 1, 3, 9, 11, 33, du premier 99, ſurpaſſe la ſomme 41 des parties aliquotes 1, 3, 7, 9, 21, du ſecond 63 de ce nombre quarré 16, dont la racine eſt 4. Il arrive la même choſe à ces deux autres nombres 325, 175. Car la ſomme 109 des parties aliquotes 1, 5, 13, 25, 65, du premier 325, ſurpaſſe la ſomme 73 des

parties aliquotes 1, 5, 7, 25, 35, du ſecond 175, de ce nombre quarré 36, dont la racine eſt 6.

XXVII.

La ſomme de deux nombres qui different de l'unité eſt égale à la différence de leurs quarrés : & la ſomme des quarrés de leurs nombres triangulaires eſt auſſi un nombre triangulaire. La ſomme 11 de ces deux nombres 5, 6, qui different de l'unité, eſt égale à la différence de leurs quarrés 25, 36 ; & leurs nombres triangulaires 15, 21, ſont tels que la ſomme 666 de leurs quarrés 225, 441, eſt auſſi un nombre triangulaire, dont le côté eſt 36.

XXVIII.

Les deux nombres triangulaires 6, 10, des deux nombres 3, 4, qui different auſſi de l'unité, ſont tels que leur ſomme 16, & leur différence 4, ſont des nombres quarrés, dont les racines ſont 4, 2, & que la ſomme 136 de leurs quarrés 36, 100, eſt un nombre triangulaire, dont le côté 16, eſt auſſi un nombre quarré, dont la racine 4 eſt encore un nombre quarré dont la racine eſt 2.

Il arrive la même choſe à ces deux autres nombres triangulaires 36, 45, dont les côtés 8, 9, different auſſi de l'unité. Car leur ſomme 81, & leur difference 9, ſont des nombres quarrés dont les racines ſont 9, 3. Et la ſomme 3321 de leurs quarrés 1296, 2025, eſt un nombre triangulaire dont le côté eſt 81, qui a pour racine quarrée 9, laquelle a auſſi ſa racine quarrée 3.

Il y a une infinité de couples d'autres nombres triangulaires, qui ont la même propriété. On les

trouvera en ôtant & en ajoutant un nombre quarré quelconque à ſon quarré, & les moitiés du reſte & de la ſomme ſeront les deux nombres triangulaires qu'on cherche. Les côtés de ces nombres triangulaires ainſi trouvés, différeront entre eux de l'unité.

Comme ſi l'on ôte & qu'on ajoute ce nombre quarré 16 à ſon quarré 256, les moitiés du reſte 240 & de la ſomme 272, donneront 120, 136, pour les deux nombres triangulaires qu'on cherche, dont les côtés 15, 16, different de l'unité. Voyez l'article VIII.

Ces deux nombres triangulaires ainſi trouvés, ſont encore tels que le plus grand de leurs côtés eſt toujours un nombre quarré : que la différence de leurs quarrés eſt auſſi un nombre quarré, que leur ſomme enfin eſt un quarré-quarré, qui eſt égal au quarré de leur différence, & au côté du nombre triangulaire que compoſe la ſomme de leurs quarrés.

Si vous voulez connoître les côtés de ce nombre triangulaire 120, multipliez-le par 8, & au produit ajoutez l'unité, la ſomme ſera 961 ; tirez en la racine quarrée qui ſera 31, prenez la plus petite moitié de cette racine 31 qui eſt 15 ; ce ſera le côté du nombre triangulaire 120. Faites la même choſe à l'égard de 136 & de tous les autres nombres triangulaires, dont vous voudrez trouver le côté. Voyez l'article VIII, p. 20.

XXIX.

La différence des quarrés de deux nombres en raiſon double eſt égale à la ſomme de leurs cubes, diviſée par la ſomme des deux nombres, & la

même ſomme des cubes eſt le tiers d'un cube.

Si on prend les deux nombres 4, 8, qui ſont en raiſon double, la différence 48 de leurs quarres 16, 64, eſt égale au quotient qui vient en diviſant la ſomme 576 de leurs cubes 64, 512, par la ſomme 12 des deux nombres: & la même ſomme 576 des cubes eſt le tiers de ce cube 1728, dont le côté 12 eſt toujours égal à la ſomme des deux nombres.

Je n'aurois jamais fait, ſi je voulois mettre ici toutes les propriétés des nombres, qui ſont infinies. C'eſt pourquoi je finirai ce problême par la table des nombres premiers, que j'ai promiſe.

Table des nombres premiers entre 1 *&* 10000.

2	167	383	617	881	1129	1429	1693	1993	2273	2557
3	173	389	619	883	1151	1433	1697	1997	2281	2579
5	179	397	631	887	1153	1439	1699	1999	2287	2591
7	181	401	641	907	1163	1447	1709	2003	2293	2593
11	191	409	643	911	1171	1451	1721	2011	2297	2609
13	193	419	647	919	1181	1453	1723	2017	2309	2617
17	197	421	653	929	1187	1459	1733	2027	2311	2621
19	199	431	659	937	1193	1471	1741	2029	2333	2633
23	211	433	661	941	1201	1481	1747	2039	2339	2647
29	223	439	673	947	1213	1483	1753	2053	2341	2657
31	227	443	677	953	1217	1487	1759	2063	2347	2659
37	229	449	683	967	1223	1489	1777	2069	2351	2663
41	233	457	691	971	1229	1483	1783	2081	2357	2671
43	239	461	701	977	1231	1499	1787	2083	2371	2677
47	241	463	709	983	1237	1511	1789	2087	2377	2683
53	251	467	719	991	1249	1523	1801	2089	2381	2687
59	257	479	727	997	1259	1531	1811	2099	2383	2689
61	263	487	733	1009	1277	1543	1823	2111	2389	2693
67	269	491	739	1013	1279	1549	1831	2113	2393	2699
71	271	499	743	1019	1283	1553	1847	2129	2399	2707
73	277	503	751	1021	1289	1559	1861	2131	2411	2711
79	281	509	757	1031	1291	1567	1867	2137	2417	2713
83	283	521	761	1033	1297	1571	1871	2141	2423	2719
89	293	523	769	1039	1301	1579	1873	2143	2437	2729
97	307	541	773	1049	1303	1583	1877	2153	2441	2731
101	311	547	787	1051	1307	1597	1879	2161	2447	2741
103	313	557	797	1061	1319	1601	1888	2179	2459	2749
107	317	563	811	1063	1321	1607	1901	2203	2467	2753
109	331	569	821	1069	1327	1609	1907	2207	2473	2767
113	337	571	823	1087	1361	1613	1913	2213	2477	2777
127	347	577	827	1091	1367	1619	1931	2221	2503	2789
131	349	587	829	1093	1373	1621	1933	2237	2521	2791
137	353	593	839	1097	1381	1627	1949	2239	2531	2797
139	359	599	853	1103	1399	1637	1951	2243	2539	2801
149	367	601	857	1109	1409	1663	1973	2251	2543	2803
151	373	607	859	1117	1423	1667	1979	2267	2549	2819
157	379	613	863	1123	1427	1669	1987	2269	2551	2833
163			877							

Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

2837	3187	3499	3797	4111	4451	4789	5101	5449	5791
2843	3191	3511	3803	4127	4457	4793	5107	5471	5801
2851		3517	3821	4129	4463	4799	5113	5477	5807
2857	3203	3527	3823	4133	4481	4801	5119	5479	5813
2861	3209	3529	3833	4139	4483	4813	5147	5483	5821
2879	3217	3533	3847	4153	4493	4817	5153	5501	5827
2887	3221	3539	3851	4157	4507	4831	5167	5503	5839
2897	3229	3541	3853	4159	4513	4861	5171	5507	5843
2903	3251	3547	3863	4177	4517	4871	5179	5519	5849
2909	3253	3557	3877	4201	4519	4877	5189	5521	5851
2917	3257	3559	3881	4211	4523	4889	5197	5527	5857
2927	3259	3571	3889	4217	4547	4903	5209	5531	5861
2939	3271	3581	3907	4219	4549	4909	5227	5557	5867
2953	3299	3583	3911	4229	4561	4919	5231	5563	5869
2957	3301	3593	3917	4231	4567	4931	5233	5569	5879
2963	3307	3607	3919	4241	4583	4933	5237	5573	5881
2969	3313	3613	3923	4243	4591	4937	5261	5581	5897
2971	3319	3617	3929	4253	4597	4943	5273	5591	5903
2999	3323	3623	3931	4259	4603	4951	5279	5623	5923
3001	3329	3631	3943	4261	4621	4957	5281	5639	5927
3011	3331	3637	3947	4271	4637	4967	5297	5641	5939
3019	3343	3643	3967	4273	4639	4969	5303	5647	5953
3023	3347	3659	3989	4283	4643	4973	5309	5651	5981
3037	3359	3671	4001	4289	4649	4987	5323	5653	5987
3041	3361	3673	4003	4297	4651	4993	5333	5657	6007
3049	3371	3677	4007	4327	4657	4999	5347	5659	6011
3061	3373	3691	4013	4337	4663	5003	5351	5669	6029
3067	3389	3697	4019	4339	4673	5009	5381	5683	6037
3079	3391	3701	4021	4349	4679	5011	5387	5689	6043
3083	3407	3709	4027	4357	4691	5021	5393	5693	6047
3089	3413	3719	4049	4363	4703	5023	5399	5701	6053
3109	3433	3727	4051	4373	4721	5039	5407	5711	6067
3119	3449	3733	4057	4391	4723	5051	5413	5717	6073
3121	3457	3739	4073	4397	4729	5059	5417	5737	6079
3137	3461	3761	4079	4409	4733	5077	5419	5741	6089
3163	3463	3767	4091	4421	4751	5081	5431	5743	6091
3167	3467	3769	4093	4423	4759	5087	5437	5749	
3169	3469	3779	4099	4441	4773	5099	5441	5779	6101
3181	3491	3793		4447	4787		5443	5783	6113

Table

Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

6121	6449	6803	7151	7523	7853	8219	8581	8893	9241
6131	6451	6823	7159	7529	7867	8221	8597	8923	9257
6133	6469	6827	7177	7537	7873	8231	8599	8929	9277
6143	6473	6829	7187	7541	7877	8233	8609	8933	9281
6151	6481	6833	7193	7547	7879	8237	8623	8941	9283
6163	6491	6841		7549	7883	8243	8627	8951	9293
6173	6521	6857	7207	7559		8263	8629	8963	
6197	6529	6863	7211	7561	7901	8269	8641	8969	9311
6199	6547	6869	7213	7573	7907	8273	8647	8971	9319
6203	6551	6871	7219	7577	7917	8287	8663	8999	9323
6211	6553	6883	7229	7583	7927	8291	8669		9337
6217	6563	6899	7237	7589	7933	8293	8677	9001	9341
6221	6569	6907	7243	7591	7937	8297	8681	9007	9343
6229	6571	6911	7247	7603	7949	8311	8689	9011	9349
6247	6577	6917	7253	7607	7951	8317	8693	9013	9371
6257	6581	6947	7283	7621	7963	8329	8699	9029	9377
6263	6599	6949	7297	7639	7993	8353	8707	9041	9391
6269	6607	6959	7307	7643	8009	8363	8713	9043	9397
6271	6619	6961	7309	7649	8011	8369	8719	9049	9403
6277	6637	6967	7321	7669	8017	8377	8731	9059	9413
6287	6653	6971	7331	7673	8039	8387	8737	9067	9419
6299	6659	6977	7333	7681	8053	8389	8741	9091	9421
6301	6661	6983	7349	7687	8059	8419	8747	9103	9431
6311	6673	6991	7351	7691	8069	8423	8753	9109	9433
6317	6679	6997	7369	7699	8081	8429	8761	9127	9437
6323	6689	7001	7393	7703	8087	8431	8779	9133	9439
6329	6691	7013	7411	7717	8089	8443	8783	9137	9461
6337	6701	7019	7417	7723	8093	8447	8803	9151	9463
6343	6703	7027	7433	7727	8101	8461	8807	9157	9467
6353	6709	7039	7451	7741	8111	8467	8819	9161	9473
6359	6719	7043	7457	7753	8117	8501	8821	9173	9479
6361	6733	7057	7459	7757	8123	8513	8831	9181	9491
6367	6737	7069	7477	7759	8147	8521	8837	9187	9497
6373	6761	7079	7481	7789	8161	8527	8839	9199	
6379	6763	7103	7487	7793	8167	8537	8849		9511
6389	6779	7109	7489	7817	8171	8539	8861	9203	9521
6397	6781	7121	7499	7823	8179	8543	8863	9209	9533
6421	6791	7127	7507	7829	8191	8563	8867	9221	9539
6427	6793	7129	7517	7841	8209	8573	8887	9239	9551

Table des nombres premiers entre 1 *&* 10000.

9587	9629	9679	9733	9781	9817	9859	9907	9967
——	9631	9689	9739	9787	9829	9871	9923	9973
9601	9643	9697	9743	9791	9833	9883	9929	——
9613	9649	——	9749	——	9839	9887	9931	
9619	9661	9719	9767	9803	9851	——	9941	
9623	9677	9721	9769	9811	9857	9901	9949	

PROBLEME IX.

Des triangles rectangles en nombres.

ON appelle *triangle rectangle en nombres*, trois nombres inégaux, dont le plus grand eſt tel, que ſon quarré eſt égal à la ſomme des quarrés des deux autres, comme 3, 4, 5. Car le quarré 25 du plus grand 5, qu'on appelle *hypotenuſe*, eſt égal à la ſomme des quarrés 9, 16, des deux autres 3, 4, qu'on appelle *côtés*, dont l'un étant pris pour la *baſe* du triangle rectangle, l'autre en ſera la *hauteur*. La moitié 6 du produit 12 ſous cette baſe & cette hauteur, ſe nomme *aire*, qui eſt toujours diviſible par 3. Vous remarquerez que par le produit des deux nombres, nous entendons celui qui vient de leur multiplication.

Il y a une infinité de triangles rectangles de diverſes eſpeces, tant en nombres entiers qu'en nombres rompus : mais on les conçoit ordinairement en nombres entiers, entre leſquels le premier & le plus petit de tous eſt le précédent 3, 4, 5 : il a un infinité de belles propriétés, qu'il ſeroit trop long de rapporter ici. Je me contenterai de dire que la ſomme 216 des cubes 27, 64, 125, de ſes deux côtés 3, 4, & de ſon hypoténuſe 5, eſt un cube dont le côté 6 eſt égal à ſon aire.

Pour trouver en nombres autant de triangles rectangles qu'on voudra, prenez à volonté deux nombres, comme 1, 3, qu'on appelle *nombres générateurs*; & multipliez-les enſemble, pour avoir leur produit 6, dont le double 12 ſera le côté d'un triangle rectangle; l'autre côté ſera égal à la différence 5 des quarrés 4, 9, des nombres générateurs 2, 3; & l'hypoténuſe ſera égale à la ſomme 13 des mêmes quarrés 4, 9. De ſorte qu'on aura ce triangle rectangle 5, 12, 13: car le quarré 169 de l'hypoténuſe 13 eſt égal à la ſomme des quarrés 25, 144, dont les racines ſont 5, 12.

Le premier triangle rectangle 3, 4, 5, dont les deux nombres générateurs ſont 1, 2, eſt tel, que la différence des deux côtés 3, 4, eſt 1. Si vous voulez en *trouver un autre qui ait la même propriété*, prenez pour le plus petit nombre générateur de ce ſecond triangle, le nombre 2, qui eſt le plus grand nombre générateur du premier. Doublez ce nombre 2; ajoutez à 4 double de 2, 1, le plus petit nombre générateur du premier, & vous aurez 5, qui ſera le plus grand nombre générateur du ſecond triangle cherché, que vous trouverez en ſuivant la regle qu'on vient de donner. Ces trois nombres ſeront 20, 21, 29, dont les deux côtés 20, 21, ne different que de l'unité.

Si vous voulez un troiſieme triangle rectangle qui ait la même propriété, ſervez vous des deux nombres générateurs 2, 5, du triangle précédent, & prenez le plus grand 5 pour le plus petit du troiſieme triangle rectangle. Doublez ce nombre 5, ajoutez à 10 double de 5, 2, le plus petit nombre générateur du triangle précédent, & vous aurez 12 pour le plus grand nombre générateur du troiſieme triangle rectangle, qui ſera 119, 120,

169, où la différence des deux côtés 119, 120, eſt auſſi 1. Vous ſuivrez la même regle pour trouver les autres. La table que l'on a jointe ici ſervira à faire connoître les ſix premiers triangles, dont les côtés ne different que de l'unité : on peut la continuer auſſi loin que l'on voudra, en ſuivant les exemples qu'on vient de donner.

Cotés.	*Hypotén.*		*Nombr.*	*génér.*
3.	4.	5.	1.	2.
20.	21.	29.	2.	5.
119.	120.	169.	5.	12.
696.	697.	985.	12.	29.
4059.	4060.	5741.	29.	70.
23660.	23661.	33461.	70.	169.

Le même premier triangle rectangle 3, 4, 5, eſt encore tel, que l'excès de l'hypoténuſe 5 ſur le côté 4 eſt auſſi 1, parce que ſes deux nombres générateurs 1, 2, different de l'unité.

Baſes.	*Hauteurs.*	*Hypotén.*	*Nombr.*	*génér.*
3.	4.	5.	1.	2.
5.	12.	13.	2.	3.
7.	24.	25.	3.	4.
9.	40.	41.	4.	5.
11.	60.	61.	5.	6.
13.	84.	85.	6.	7.

C'eſt pourquoi on pourra *trouver une infinité d'autres triangles rectangles, qui auront la même propriété*, ſi pour leurs nombres générateurs on prend deux nombres qui different de l'unité, comme vous voyez dans la table précédente, où les premieres différentes des baſes 3, 5, 7, 9, &c. ſont égales, & où les ſecondes différences des hau

teurs 4, 12, 24, 40, &c. ſont auſſi égales; ce qui arrive auſſi aux hypoténuſes 5, 13, 25, 41, &c.

REMARQUES.

Les ſecondes différences des hauteurs ſont égales; car la différence de 12 à 4 eſt 8, & la différence de 24 à 12 eſt 12 : mais la différence de 12 à 8 eſt 4. De même la différence de 40 à 24 eſt 16, & la différence de 16 à 12 eſt auſſi 4. Ainſi des autres.

Hauteurs.	1es *Diff.*	2es *Diff.*
12	8	4
4		
24	12	
12		4
40	16	
24		

Les hypoténuſes ont auſſi les ſecondes différences égales, comme on le voit par cette table.

Hypotén.	1es *Diff.*	2es *Diff.*
13	8	4
5		
25	12	
13		4
41	16	
25		

Les baſes ſont ici des nombres impairs; & ſi l'on veut qu'elles ſoient les quarrés de ces mêmes nombres impairs, il ne faut que prendre les hauteurs & les hypoténuſes pour les nombres géné-

rateurs des triangles rectangles qu'on cherche, lesquels par conséquent seront tels.

Bases.	*Hauteurs.*	*Hypoten.*	*Nombr. génér.*	
9.	40.	41.	4.	5.
25.	312.	313.	12.	13.
49.	1200.	1201.	24.	25.
81.	3280.	3281.	40.	41.
121.	7320.	7321.	60.	61.
169.	14280.	14281.	84.	85.

Si au lieu d'un côté, vous voulez que l'*hypoténuse soit un nombre quarré*, il faut que les deux nombres générateurs soient les côtés d'un triangle rectangle, comme vous voyez ici, où l'hypoténuse est le quarré du plus grand nombre générateur augmenté de l'unité.

Côtés.		*Hypoten.*	*Nombr. génér.*	
7.	24.	25.	3.	4
119.	120.	169.	5.	12
336.	527.	625.	7.	24
720.	1519.	1681.	9.	40
1320.	3479.	3721.	11.	60.
3184.	6887.	7225.	13.	84.

Ce triangle rectangle 21, 28, 35, est tel que les deux côtés 21, 28, sont des nombres triangulaires, dont les côtés 6, 7, different de l'unité, & le quarré 1225 de l'hypoténuse 34 est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 49.

Il arrive la même chose à cet autre triangle rectangle 820, 861, 1189. Car les deux côtés 820,

861, ſont des nombres triangulaires dont les côtés 40, 41 different auſſi de l'unité, & le quarré 1413721 de l'hypoténuſe 1189 eſt auſſi un nombre triangulaire, dont le côté eſt 1681.

Il arrive encore la même choſe à ce troiſieme triangle rectangle 28441, 28680, 40391. Car les deux côtés 28441, 28680, ſont des nombres triangulaires, dont les côtés 238, 239, different auſſi de l'unité, & le quarré 1631432881 de l'hypoténuſe 40391, eſt auſſi un nombre triangulaire, dont le côté eſt 57121. Ainſi des autres.

Les triangles rectangles ſuivans ont pour baſes & pour hypoténuſes des nombres triangulaires, &

Baſes.	*Hauteurs.*	*Hypoten.*	*Nombr. génér.*	
6.	8.	10.	1.	3.
36.	27.	45.	3.	6.
120.	64.	136.	6.	10.
300.	125.	325.	10.	15.
630.	216.	666.	15.	21.
1176.	343.	1225.	21.	28.

pour hauteur des nombres cubiques. On en *trouvera autant que l'on voudra*, en ajoutant & en ôtant un nombre quarré de ſon quarré; car la moitié de la ſomme ſera l'hypoténuſe, la moitié du reſte ſera la baſe, & la hauteur ſera égale au cube du côté du premier nombre quarré : ou bien en prenant pour nombres générateurs les nombres triangulaires par ordre, comme vous voyez ici, où le plus petit nombre générateur d'un triangle rectangle eſt le même que le plus grand du triangle rectangle précédent, &c.

Div

PROBLEME X.

De la progreſſion arithmétique.

ON appelle *progreſſion arithmétique*, une ſuite de grandeurs, dont la différence eſt la même à l'égard de celles qui ſe ſuivent immédiatement. Cette ſuite peut aller en augmentant ou en diminuant. Ces nombres 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. forment une progreſſion arithmétique, dont la différence ou l'excès eſt 2. Cette autre ſuite de nombres 2, 6, 10, 14, 18, 22, &c. eſt une autre progreſſion arithmétique, dont la différence eſt 4. Ces deux progreſſions vont en augmentant. Celle-ci 32, 27, 22, 17, 12, 7, &c. va en diminuant, & ſa différence eſt 5. Chaque grandeur de la progreſſion eſt appellée *terme*.

La principale propriété de la progreſſion arithmétique, eſt que ſi on prend trois termes de ſuite, 6, 10, 14, la ſomme 20, des deux extrêmes 6, 14 eſt double du moyen 10. De même ſi on prend quatre termes de ſuite 6, 10, 14, 18, la ſomme 24 des deux extrêmes 6, 18, eſt égale à celle des deux moyens 10, 14. Enfin ſi on prend un plus grand nombre de termes de ſuite, comme ces ſix, 2, 6, 10, 14, 18, 22, la ſomme 24 des deux extrêmes 2, 22, eſt encore égale à celle des deux autres 6, 18, qui en ſont également éloignés, & à celle des deux 10, 14, qui en ſont auſſi également éloignés. D'où il eſt aiſé de conclure que quand le nombre des termes eſt impair, la ſomme de deux termes également éloignés du moyen, eſt double de ce terme moyen, comme on le voit dans les cinq termes 2, 6, 10, 14, 18. Car la ſomme 20 des deux extrêmes 2, 18, ou de ces deux autres 6, 14, qui

ſont également éloignés du moyen 10, auſſi bien que des extrêmes, eſt double de ce moyen 10.

On peut aiſément trouver autant qu'on voudra de triangles rectangles en nombres, par le moyen de cette double progreſſion arithmétique $1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{5}, 3\frac{3}{7}, 4\frac{4}{9}, 5\frac{5}{11}, 6\frac{6}{13}, 7\frac{7}{15}, 8\frac{8}{17}$, &c. où l'excès eſt 2 dans les fractions, & 1 dans les nombres entiers. Car ſi l'on réduit l'entier avec ſa fraction en une ſeule fraction, comme $1\frac{1}{3}$ en $\frac{4}{3}$, * le numérateur 4, & le dénominateur 3, ſeront les côtés de ce triangle rectangle 3, 4, 5, dont on connoîtra l'hypoténuſe 5, en prenant la racine quarrée de 25, ſomme des quarrés 9, 16 des côtés 3, 4. De même ſi l'on réduit $2\frac{5}{7}$ en $\frac{12}{5}$, * le dénominateur 5 & le numérateur 12, ſeront les côtés de ce triangle rectangle 5, 12, 13. Ainſi des autres, où vous voyez que tout nombre impair peut être l'un des deux côtés d'un triangle rectangle, en nombres entiers.

Au lieu de cette double progreſſion arithmétique, on peut ſe ſervir de celle-ci, $1\frac{7}{8}, 2\frac{11}{12}, 3\frac{15}{16}, 4\frac{19}{20}, 5\frac{23}{24}, 6\frac{27}{28}, 7\frac{31}{32}, 8\frac{35}{36}$, &c. où l'excès eſt 4 dans les fractions, & 1 dans les nombres entiers. Car ſi l'on réduit $1\frac{7}{8}$ en $\frac{15}{8}$, * le dénominateur 8, & le numérateur 15, ſeront les deux côtés de ce triangle rectangle 8, 15, 17. De même ſi l'on réduit $2\frac{11}{12}$ en $\frac{35}{12}$, * le dénominateur 12, & le numérateur 35, ſeront les deux côtés de cet autre triangle rectangle 12, 35, 37. Ainſi des autres, où vous voyez qu'un nombre diviſible par 4 peut être l'un des deux côtés d'un triangle rectangle en nombres entiers.

* Ce qui ſe fait en multipliant le nombre entier par le dénominateur, & ajoutant au produit le numérateur.

Pour trouver une infinité de ſemblables progreſſions, on prendra à volonté deux nombres quelconques, comme 1, 2, ou 3, 5, qui ſont les termes générateurs des deux progreſſions précédentes, ou tels autres nombres qu'il plaira.

Premierement, on aura le numérateur de la premiere fraction en multipliant ces termes l'un par l'autre : ſi le produit eſt impair, il ſera le numérateur cherché; mais s'il eſt pair, il faudra prendre le double de ce produit.

Secondement, on aura le dénominateur de cette premiere fraction, en ajoutant les deux termes choiſis, & en multipliant cette ſomme par la différence de ces mêmes termes : ſi le produit eſt impair, il ſera le dénominateur cherché; mais s'il eſt pair, on en prendra la moitié.

Troiſiémement, on aura le numérateur de la fraction ſuivante : 1°. En multipliant la différence des termes par 2, ſi elle eſt paire, ou par 4, ſi elle eſt impaire. 2°. En multipliant ce produit par le plus grand terme choiſi. 3°. En ajoutant ce ſecond produit au numérateur de la premiere fraction; cette ſomme formera le numérateur de la ſeconde fraction.

Enfin on aura le dénominateur de cette ſeconde fraction, en ajoutant le quarré de la différence des termes choiſis, s'il eſt pair, ou le double de ce quarré, s'il eſt impair, au dénominateur de la premiere fraction. Cette ſomme donnera le dénominateur de la ſeconde fraction.

Les deux premiers termes de cette progreſſion étant réduits en entiers & en fractions, il ſera aiſé de trouver la ſuite d'autant de termes qu'on voudra; puiſqu'on connoît la différence des entiers, celle des numérateurs & celle des dénominateurs.

I.

Dans une progreſſion arithmétique, la ſomme des termes eſt égale à la ſomme des deux extrêmes, multipliée par la moitié du nombre de tous ces termes. C'eſt pourquoi *pour trouver la ſomme d'autant de termes qu'on voudra d'une progreſſion arithmétique*, par exemple, de ces huit, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, on multipliera par leur nombre 8, la ſomme 20 des deux extrêmes 3, 17, & 80, moitié du produit 160, ſera la ſomme qu'on cherche.

II.

Si au contraire on connoît la ſomme des termes, leur nombre & le premier terme, on trouvera chacun de ces termes, en cherchant leur excès en cette ſorte. Si la ſomme donnée des termes eſt par exemple 80, que leur nombre ſoit 8, & que le premier terme ſoit 3, diviſez par le nombre donné des termes 8 le double 160 de la ſomme donnée 80; ôtez du quotient 20 le double 6 du premier terme donné 3; enfin diviſez le reſte 14 par le nombre donné des termes diminués de l'unité; c'eſt à-dire, dans cet exemple, par 7; le quotient 2 ſera l'excès qu'on cherche, lequel étant ajouté au premier terme donné 3, donnera 5 pour le ſecond terme, auquel ſi l'on ajoute le même excès 2, on aura 7 pour le troiſieme terme, & ainſi de ſuite.

III.

Mais ſi l'on donne la ſomme des termes, leur nombre & l'excès, on trouvera le premier terme,

& par conſéquent tous les autres en cette ſorte. Que la ſomme donnée des termes ſoit 80, que leur nombre ſoit 8, & que l'excès ſoit 2; diviſez le double 160 de la ſomme donnée 80 par le nombre donné des termes 8; ôtez du quotient 20, autant de fois l'excès 2, que le nombre donné des termes 8 comprend d'unités moins une; ſçavoir, 7 fois, c'eſt-à-dire, qu'il faut ici ôter 14; la moitié 3 du reſte 6, ſera le premier terme, auquel ajoutant l'excès donné 2, on aura 5 pour le ſecond terme: ſi l'on ajoute à ce ſecond terme le même excès 2, on aura 7 pour le troiſieme terme, & ainſi de ſuite.

IV.

Si on connoît le premier terme, le nombre & la différence des termes, on connoîtra le dernier terme en cette ſorte. Multipliez le nombre des termes diminué de l'unité par la différence, ajoutez à ce produit le premier terme, la ſomme donnera le dernier terme. Soit le premier terme 3, le nombre des termes 8, & leur différence 2, multipliez 7, nombre des termes diminué de l'unité, par 2, différence des termes, ajoutez au produit 14 le premier terme 3, & vous aurez 17 pour le dernier terme. Nous ferons l'application de ces articles dans les queſtions ſuivantes.

QUESTION. I.

Un propriétaire fait faire un puits à un maçon avec cette condition, qu'il lui donnera 3 livres pour la premiere toiſe de profondeur, 5 pour la ſeconde, 7 pour la troiſieme, & ainſi de ſuite en augmentant de 2 livres à chaque toiſe, juſqu'à 20 toiſes

de profondeur. On demande combien il ſera dû au maçon, quand les 20 toiſes de profondeur ſeront achevées.

POur réſoudre cette queſtion, multipliez les deux livres d'augmentation pour chaque toiſe de profondeur par le nombre des toiſes moins une de toute la profondeur, c'eſt-à-dire, par 19, & ayant ajouté au produit 28 le premier terme 3, vous aurez 41 pour le dernier terme. Ajoutez à ce dernier terme 41 le premier terme 3, qui eſt le nombre des livres promiſes pour la premiere toiſe, multipliez la ſomme 44 par la moitié 10 du nombre 20 des toiſes de toute la profondeur, & vous aurez 440 livres pour l'argent dû au maçon ſur 20 toiſes de profondeur.

REMARQUE.

Cette queſtion ſe réſout par le quatrieme & le premier article; par le quatrieme article on trouve le dernier terme 41, & par le premier on trouve 440 livres, ſomme des 20 termes.

QUESTION II.

Un voyageur a fait 100 *lieues en huit jours; chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent, & le premier jour il a fait deux lieues; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.*

POur réſoudre cette queſtion, diviſez le double 200 des lieues données 100, par le nombre donné 8 des jours, & ôtez du quotient 25 le

dans ces ſortes de queſtions, il faut doubler le nombre des lieues données, où la progreſſion ne ſe rencontre point, ajouter à ce double la différence ou l'excès de la progreſſion arithmétique, ôter de cette ſomme le double du premier terme de cette progreſſion, & diviſer ce reſte par la différence des termes de la progreſſion : le quotient ſera le nombre des termes, qui étant multiplié par le nombre des lieues qui n'eſt point dans la progreſſion, donnera la ſomme de tous les termes.

QUESTION V.

On ſuppoſe que de Paris à Lyon il y a 100 lieues ; que deux couriers ſont partis en même tems, & par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faiſant 2 lieues chaque jour plus que le précédent, & l'autre de Lyon pour venir à Paris, en faiſant 3 lieues chaque jour plus que le précédent : & que preciſément au milieu du chemin ils ſe ſont rencontrés ; le premier au bout de 5 jours, & le ſecond au bout de 4 jours. On demande combien de lieues ces deux couriers ont fait chaque jour.

POur ſçavoir combien de lieues a fait chaque jour celui qui, pour rencontrer l'autre, a employé 5 jours, ôtez ce nombre 5 de ſon quarré 25, & ayant multiplié le reſte 20 par 2, nombre des lieues que ce courrier a fait chaque jour plus que le précédent, ôtez le produit 40 du nombre 100 de la diſtance de Paris à Lyon : puis diviſez le reſte 60 par 10, double de 5, nombre des jours : le quotient 6 fera connoître que le courier a fait 6 lieues le premier jour, & par conſéquent 8 le ſecond

cond, 10 le troiſieme, 12 le quatrieme, & 14 le cinquieme.

De même pour ſçavoir combien de lieues a fait chaque jour celui qui, pour rencontrer l'autre, a employé 4 jours, ôtez ce nombre 4 de ſon quarré 16, & ayant multiplié le reſte 12 par 3, nombre des lieues que ce courrier a fait chaque jour de plus, ôtez le produit 36 du nombre 100 de la diſtance de Paris à Lyon, puis diviſez le reſte 64, par 8, double de 4, nombre des jours, & le quotient 8 fera connoître que ce courier a fait 8 lieues le premier jour, & par conſéquent 11 le ſecond, 14 le troiſieme, & 17 le quatrieme.

REMARQUE.

Cette cinquieme queſtion comprend deux parties, qui peuvent fort bien ſe réſoudre chacune par le troiſieme article précédent, ſi l'on fait attention que 50, moitié de 100, eſt la ſomme des termes.

QUESTION VI.

Il y a un panier & cent pommes rangées en ligne droite, & éloignées par-tout d'un pas l'une de l'autre. On demande combien de pas feroit celui qui entreprendroit de cueillir ces pommes les unes après les autres, & de les rapporter dans le panier, qui reſteroit toujours dans la même place.

IL eſt certain que pour la premiere pomme il faut faire deux pas, un pour aller & un pour revenir : que pour la ſeconde pomme il faut faire 4 pas, deux pour aller & deux pour revenir : que pour la troiſieme pomme il faut faire 6 pas, trois pour aller & trois pour revenir : & ainſi du reſte.

On a cette progreſſion arithmétique 2, 4, 6, 8, 10, &c. dont le dernier & plus grand terme ſera 200, qui eſt le double du nombre des pommes, auquel ajoutant le premier terme 2, & multipliant la ſomme 202, par la moitié 50 du nombre des pommes, qui eſt le nombre des termes, le produit 10100 ſera la ſomme de tous ces termes, ou le nombre des pas qu'on cherche.

REMARQUE.

Cette ſixieme queſtion ſe réſout par le quatrieme article, pour avoir le dernier terme 202, & par le premier, pour avoir la ſomme des termes 10100.

QUESTION VII.

Un marchand eſt convenu avec un de ſes créanciers de lui donner de l'argent chaque ſemaine; la premiere ſemaine il lui a donné cent livres, la ſeconde quatre cent livres, il a augmenté chaque ſemaine ſon payement de trois cents livres. On demande combien il a payé la vingt-huitieme ſemaine.

POur réſoudre cette queſtion, il faut multiplier 300 livres, différence de la progreſſion, par 27, nombre des ſemaines diminuées de l'unité, & ajouter 100 livres, premier terme, au produit 8100. La ſomme 8200 livres ſera le payement que le marchand aura fait la vingt-huitieme ſemaine.

REMARQUE.

La ſolution de cette ſeptieme queſtion n'eſt que l'application du quatrieme article. On peut s'exercer à chercher par le premier article quelle peut

être la ſomme qu'a payé le marchand pendant les vingt-huit ſemaines. Voyez Schooten dans ſes *ſectiones miſcellaneæ.*

QUESTION VIII.

Un réſervoir a douze canaux : par le ſecond il s'écoule dans une heure deux pintes d'eau plus que par le premier : par le troiſieme deux pintes plus que par le ſecond, & ainſi de ſuite. On ſçait que tous ces canaux laiſſent écouler 168 pintes d'eau dans une heure. On veut ſçavoir combien chacun de ces canaux laiſſe écouler d'eau pendant une heure.

IL faut diviſer 168, ſomme de la progreſſion, par 6, moitié de 12, nombre des canaux ou des termes : du quotient 28 on ôtera 22, produit de 2, différence, par 11, nombre des termes diminués de l'unité, il reſtera 6, dont la moitié 3 eſt le premier terme de la progreſſion, c'eſt-à-dire que le premier canal laiſſera écouler 3 pintes d'eau dans une heure, le ſecond 5 pintes pendant le même tems, le troiſieme 7 pintes, &c.

REMARQUE.

Cette huitieme queſtion étant aſſez compoſée, ne peut ſe rapporter préciſément à aucun des quatres articles précédens : mais elle peut ſervir de regle pour réſoudre toutes les queſtions qui lui ſont ſemblables.

QUESTION IX.

Un pere de famille ordonne par ſon teſtament, que

l'aîné de ſes enfans prendra ſur tous ſes biens dix milles livres, & le ſeptieme de ce qui reſtera; que le ſecond prendra vingt mille livres, & le ſeptieme de ce qui reſtera; que le troiſieme prendra trente mille livres, & le ſeptieme de ce qui reſtera, & ainſi de ſuite, en augmentant toujours de dix milles livres avec le ſeptieme du reſtant. Les enfans ayant ſuivi la diſpoſition du teſtament, il ſe trouve qu'ils ont été également partagés. On demande quel étoit le bien à partager, le nombre des enfans, & la ſomme que chacun a eu.

POur réſoudre cette neuvieme queſtion, & les autres qui lui ſont ſemblables, il faut ôter 1 du dénominateur de la fraction, qui eſt ici 7; le reſte 6 ſera le nombre des enfans. Il faut enſuite quarrer ce reſte 6, & multiplier ſon quarré 36 par la ſomme que doit prendre l'aîné des enfans, & qu'on a ſuppoſé ici être 10000 livres; le produit 360000 eſt le bien à partager. Diviſant ce produit par 6, nombre des enfans, on trouve 60000 liv. qui eſt la ſomme que chacun des enfans a pris.

REMARQUE.

Si on veut ſe ſervir de l'algebre pour réſoudre ces ſortes de queſtions, on peut conſulter les nouveaux élémens d'arithmétique & d'algebre, par M. de Lagny, de l'académie royale des ſciences, pag. 417.

PROBLEME XI.

De la progreſſion géométrique.

ON appelle *progreſſion géométrique* une ſuite de pluſieurs quantités qui croiſſent continuellement par la multiplication d'un même nombre,

comme 3, 6, 12, 24, 48, 96, &c. où chaque terme eſt double du précédent : ou bien 2, 6, 18, 54, 162, 486, &c. où chaque terme eſt triple du précédent. Ainſi des autres.

I.

La principale propriété de la progreſſion géométrique eſt que, ſi on prend trois termes en proportion continue, comme 3, 6, 12, le produit 36 des deux extrêmes 3, 12, eſt égal au quarré du moyen 6. De même ſi on prend quatre termes en proportion continue, comme 3, 6, 12, 24, le produit 72 des deux extrêmes 3, 24, eſt égal au produit des deux moyens, 6, 12. Enfin ſi on prend un plus grand nombre de termes continuement proportionnels, comme ces ſix, 3, 6, 12, 24, 48, 96, le propuit 288 des deux extrêmes 3, 96, eſt égal au produit des deux 6, 48, qui en ſont également éloignés, ou des deux 12, 24, qui en ſont auſſi également éloignés. D'où il eſt aiſé de conclure que, lorſque le nombre des termes eſt impair, ce produit eſt égal au quarré du terme moyen, comme il arrive dans ces cinq termes 3, 6, 12, 24, 48. Car le produit 144 des deux extrêmes 3, 48, ou des deux 6, 24, qui en ſont également éloignés, eſt le quarré du terme moyen 12.

Ainſi vous voyez que ce qui convient à la progreſſion arithmétique par addition, convient à la progreſſion géométrique par multiplication. Mais il y a une autre différence conſidérable entre ces deux progreſſions ; c'eſt que dans la progreſſion arithmétique les différences des termes ſont égales, au lieu que dans la progreſſion géométrique elles ſont toujours inégales ; elles conſervent entre elles la même progreſſion géométrique ; & quoi-

qu'on prenne à l'infini les différences des différences, on ne peut jamais parvenir à des différences égales. Ainſi l'on voit que dans cette progreſſion géométrique 2, 6, 18, 54, 162, 486, les différences des termes ſont cette ſemblable progreſſion géométrique 4, 12, 36, 108, 324, ou les différences des termes ſont auſſi cette ſemblable progreſſion géométrique 8, 24, 72, 216, & ainſi de ſuite.

Si on prend trois termes proportionnels, comme 2, 6, 18, le cube 216, du moyen 6, eſt égal au produit ſolide qui vient de la multiplication des trois nombres 2, 6, 18. De même ſi on prend quatre nombres continuement proportionnels, comme 2, 6, 18, 54, le cube 216 du ſecond 6 eſt égal au produit ſolide qu'on a en multipliant le quatrieme 54 par 4, quarré du premier 2; & le cube 5832 du troiſieme 18, eſt égal au produit ſolide qui vient en multipliant le premier 2 par 2916, quarré du quatrieme 54.

II.

On connoît aiſément, par ce qui a été dit juſqu'à préſent, que *pour trouver un moyen géométrique proportionnel entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 18, il faut multiplier enſemble les deux nombres donnés 2, 18, & prendre la racine quarrée 6 de leur produit 36, qui ſera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et *pour trouver deux moyens géométriques continuement proportionnels entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 54, il faut multiplier le dernier 54 par 4, quarré du premier 2, & la racine cubique 6 du produit 216 ſera le premier moyen proportionnel; lequel étant multiplié par 54, ſecond

nombre donné, donnera pour produit 324, dont la racine quarrée 18, ſera l'autre moyen proportionnel qu'on cherche.

III.

Mais *pour trouver un moyen proportionnel arithmétique entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 8, il faut prendre 5, moitié de 10, ſomme des nombres donnés, 2, 8. Cette moitié 5 ſera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et *pour trouver deux moyens arithmétiques continuement proportionnels entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 11, on ôtera 2, le plus petit nombre donné, du plus grand 11; on ajoutera ſéparément au même plus petit 2, le tiers 3 du reſte 9, & 6 double de ce tiers, & l'on aura 5 & 8, pour les deux moyens proportionnels qu'on cherche.

Ou bien on ajoutera au plus grand 11 des deux nombres donnés, le double 4 du plus petit 2, & réciproquement au plus petit 2, le double 22 du plus grand 11, & les tiers des deux ſommes 15, 24, donneront 5 & 8 pour les deux moyens qu'on cherche.

IV.

Il eſt évident que toutes les puiſſances par ordre d'un même nombre, comme de 2, ſont une progreſſion géométrique, telle qu'eſt la ſuivante,

1	2		4				8	
2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	&c.
1	1		1				1	
3	5		17				257	

où vous voyez que toutes les puiſſances du nom-

bre 2 ; dont les expoſans 1, 2, 4, 8, 16, &c. ſont les termes d'une progreſſion géométrique, ſçavoir 2, 4, 16, 256, &c. ſont telles que ſi à chacune on ajoute l'unité, les ſommes 3, 5, 17, 257, &c. ſont des nombres premiers. Par où il eſt aiſé de trouver un nombre premier plus grand que quelque nombre donné que ce ſoit.

V.

Les termes d'une progreſſion géométrique peuvent aller en augmentant ou en diminuant ; mais quelle que ſoit la progreſſion, *on pourra la continuer à l'infini*, ſi connoiſſant les deux premiers termes, on diviſe le quarré du ſecond terme par le premier, le quotient ſera le troiſieme terme ; ſi on diviſe enſuite le quarré du terme trouvé par le terme précédent, le quotient ſera le terme ſuivant, & ainſi de ſuite. Soient donnés 2, 4, premiers termes d'une progreſſion. Pour la continuer à l'infini, il ſuffit de diviſer 16, quarré du ſecond terme 4, par le premier 2, le quotient 8 ſera le troiſieme terme ; on diviſera enſuite 64, quarré du troiſieme terme 8, par le terme précédent 4, & le quotient 16 ſera le quatrieme terme. Ainſi du reſte.

Quand la progreſſion va en augmentant, il eſt plus aiſé de diviſer le ſecond terme par le premier, & de multiplier le ſecond terme par le quotient qu'on appelle expoſant de la raiſon : le produit donne le troiſieme terme. On multiplie enſuite ce troiſieme terme par le même expoſant, ce produit donne le quatrieme terme. On continue la même opération, pour avoir autant de termes qu'on voudra.

VI.

Pour trouver quelque terme que ce ſoit d'une pro-

greſſion dont on connoît le premier & le ſecond terme; ſi elle va en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, & qu'on veuille connoître le huitieme terme, il faut diviſer le ſecond terme 4 par le premier 2, il viendra 2 pour expoſant de la progreſſion; il faut enſuite multiplier cet expoſant 2, 7 fois par lui-même, nombre du terme qu'on cherche diminué de l'unité, c'eſt à-dire, qu'il faut prendre la ſeptieme puiſſance de 2, qui eſt 128, qu'on multipliera par le premier terme 2; le produit 256 ſera le huitieme terme qu'on demande.

VII.

Si on propoſe une progreſſion géométrique qui aille en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, le premier terme 2 eſt au ſecond 4, comme la ſomme de tous les termes moins le dernier 256, eſt à la ſomme de tous les termes moins ce premier 2. Ainſi, *pour avoir la ſomme de tous les termes d'une progreſſion qui va en augmentant*, comme de la précédente, il faut multiplier le dernier terme 256 par le ſecond 4, retrancher du produit 1024, le quarré 4 du premier terme 2, & diviſer le reſte 1020 par 2, différence du ſecond terme 4 au premier 2; le quotient 510 ſera la ſomme de tous les termes de la progreſſion propoſée.

VIII.

Si l'on continue à l'infini une progreſſion géométrique en décroiſſant, comme 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. la différence 4 des deux premiers termes 6, 2, eſt au premier 6, comme le même premier 6 eſt

à la ſomme de tous les termes infinis. C'eſt pourquoi, *pour trouver la ſomme de tous les termes infinis d'une progreſſion géométrique qui décroît*, comme de la propoſée, 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. il faut diviſer le quarré 36 du premier terme 6, par la différence 4 des deux premiers 6, 2, & le quotient 9 ſera la ſomme qu'on cherche, de laquelle ôtant 8, ſomme des deux premiers termes 6, 2, il reſtera 1 pour la ſomme de ces fractions infinies continuement proportionnelles $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. On connoîtra de la même façon, que la ſomme de toutes ces fractions infinies continuement proportionnelles $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. vaut auſſi 1.

REMARQUE.

Quand on parle de quantités proportionnelles ſans ſpécifier, cela s'entend toujours de la proportion géométrique. Nous dirons ici en paſſant, que ſi de l'unité, comme numérateur, & des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme dénominateurs, on fait cette ſuite de fractions, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. qui vont toujours en diminuant, ces fractions étant priſes conſécutivement de trois en trois, comme l'on voudra, ſeront en proportion harmonique; c'eſt-à-dire, que la premiere de ces trois ſera à la troiſieme, comme la différence des deux premieres eſt à la différence des deux dernieres. Ce que l'on connoîtra encore mieux en réduiſant ces fractions en même dénomination, ou en entiers, comme on le voit ici pour les cinq fractions $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, en les multipliant par le même nombre 60, qui eſt diviſible par tous les dénominateurs 2, 3, 4, 5; car à la place de ces cinq fractions, on aura ces

cinq nombres entiers 60, 30, 20, 15, 12, dont les trois premiers 60, 30, 20, ſont en proportion harmonique. Car le premier 60 eſt au troiſieme 20, qui en eſt la troiſieme partie, comme la différence 30 des deux premiers eſt à la différence 10 des deux derniers, qui en eſt auſſi la troiſieme partie. C'eſt par un ſemblable raiſonnement, que l'on connoîtra que ces trois nombres 30, 20, 15, ſont en proportion harmonique, auſſi-bien que ces trois autres 20, 15, 12.

QUESTION I.

Un grand navire en pourſuit un plus petit, dont il eſt éloigné de 4 lieues, & il va deux fois plus vite que le plus petit : ils ſont ſur le même rumb. On demande le chemin que le grand navire doit faire pour atteindre le petit.

PArce que la diſtance des deux navires eſt 4, & que leurs vîteſſes ſont en raiſon double, continuez à l'infini cette progreſſion géométrique double 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c, dont le premier & le plus grand terme ſoit 4 : cherchez la ſomme de tous ces termes infinis, en diviſant 16, quarré du premier 4, par la différence 2 des deux premiers 4, 2, vous aurez 8 pour cette ſomme, qui fera connoître que lorſque le grand navire aura fait huit lieues, il atteindra le petit.

QUESTION. II.

On ſuppoſe qu'Achille aille dix fois plus vîte qu'une tortue qui auroit une lieue d'avance. On demande s'il eſt poſſible qu'Achille attrappe cette tortue, & à quelle diſtance il l'attrappera.

ON a fait cette queſtion, parce que Zenon, chef des philoſophes appellés ſtoïciens, prétendoit qu'Achille ne pourroit jamais attrapper la tortue. Car tandis qu'Achille, diſoit ce philoſophe, feroit la premiere lieue, la tortue feroit le dixieme de la ſeconde lieue; & tandis qu'Achille feroit le dixieme de la ſeconde lieue, la tortue feroit le dixieme de cette dixieme, ou un centieme; & ainſi à l'infini.

Ce philoſophe ſuppoſoit fauſſement que tous ces dixiemes compoſoient un eſpace infini; mais il eſt aiſé de faire voir qu'ils font cette progreſſion géométrique, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. dont les termes vont en diminuant à l'infini. On trouvera la ſomme de tous ces termes infinis en diviſant 1, quarré du premier terme par 1, moins $\frac{1}{10}$, ou $\frac{9}{10}$, différence du premier & du ſecond terme; le reſte eſt $\frac{10}{9}$, ou $1\frac{1}{9}$. Ce qui fait voir qu'Achille attrapperа la tortue, quand il aura parcouru la premiere lieue, & le neuvieme de la ſeconde lieue.

QUESTION III.

Une pendule a deux aiguilles, l'une des heures, l'autre des minutes. Suppoſant qu'elles partent

toutes deux du point de midi, on demande en quel autre point elles doivent ſe rencontrer.

PUiſque l'une des deux aiguilles va douze fois plus vîte que l'autre, & que quand celle des heures eſt au point de midi, celle-ci a un tour d'avance plus que celle-là. Leur mouvement formera donc cette progreſſion géométrique $1 \frac{1}{12}, \frac{1}{144}$, &c. qui décroît à l'infini : par conſéquent ſi l'on diviſe le quarré du premier terme 1, par la différence du premier au ſecond $\frac{11}{12}$, on connoîtra que ces deux aiguilles ſe rencontreront à $1 \frac{1}{11}$, c'eſt-à-dire, à une heure & un onzieme d'heure.

D'où il eſt aiſé de conclure que ces aiguilles ſe rencontreront à ces heures-ci $1 \frac{1}{11}$, $2 \frac{2}{11}$, $3 \frac{3}{11}$, $4 \frac{4}{11}$, $5 \frac{5}{11}$, $6 \frac{6}{11}$, $7 \frac{7}{11}$, $8 \frac{8}{11}$, $9 \frac{9}{11}$, $10 \frac{10}{11}$, $11 \frac{11}{11}$, ou 12 heures.

REMARQUE.

On voit bien que ces trois premieres queſtions ſe réſolvent par l'article VIII précédent.

QUESTION IV.

Un maquignon vend un très-beau cheval, il ſe contente du prix du vingt-quatrieme clou du cheval, pourvu qu'on veuille compter de maniere que du premier clou on donnât 1 denier, du ſecond 2 deniers, du troiſieme 4 deniers, & ainſi de ſuite, en doublant les deniers juſqu'au vingt-qua-

trieme clou. On demande de quel prix ſeroit le cheval.

PUiſque le prix des cloux forme cette progreſſion 1, 2, 4, 8, 16, &c. qui va en augmentant, il faut prendre la vingt-troiſieme puiſſance de 2 expoſant de la progreſſion, ce ſera 8388608 deniers, ou trente-quatre mille neuf cent cinquante-deux livres dix ſols huit deniers, pour le prix du cheval.

REMARQUE.

La ſolution de cette queſtion dépend du ſixieme article ; on n'a point multiplié la vingt-troiſieme puiſſance de 2 par le premier terme, qui eſt ici l'unité, parce qu'elle ne change rien dans la multiplication. C'eſt une choſe à remarquer dans les progreſſions qui commencent par l'unité.

QUESTION V.

Une vieille dame poſſede trente-deux belles terres ; elle eſt fort avare, elle aime l'argent encore plus que ſes terres, elle voudroit en vendre quelques-unes, afin d'avoir le plaiſir de marcher ſur l'or ; mais pour ne point effrayer un de ſes héritiers, qui eſt homme de cœur, elle ne propoſe d'abord que la moindre à vendre, ſous pretexte que l'argent eſt rare, & qu'elle a quelques dettes à payer, quoique ſes coffres ſoyent pleins. On offre de lui donner pour cette terre, la ſomme qui conviendroit à la trente-deuxieme de ſes terres, ſi on payoit 1 ſol pour la premiere, 2 ſols pour la ſeconde, 4 ſols pour la troiſieme, & ainſi de ſuite, en doublant les ſols juſqu'à la trente-deuxieme terre.

Cette dame apprehende d'être trompée, elle demande quel prix on lui donneroit de ſa terre.

ON peut aiſément la raſſurer, elle trouvera ſon compte à vendre ſa terre à la condition qui lui a été offerte. L'acheteur ſeroit obligé de lui donner 107 millions 374 mille 182 livres huit ſols.

REMARQUE.

On peut s'exercer à trouver ce nombre, en cherchant la trente-unieme puiſſance de 2 expoſant de la progreſſion, ſuivant l'article VI, & ce qui a été dit dans la remarque de la queſtion précédente.

QUESTION VI.

On ſuppoſe qu'un grain de bled produiſe 50 autres grains dans la premiere année; qu'on ſeme ces 50 grains, & qu'ils produiſent chacun 50 grains la deuxieme année, & ainſi de ſuite. On demande quel ſera le nombre des grains de bled qui ſeront produits pendant douze ans.

CE nombre de grains de bled produit pendant douze ans eſt trés-conſiderable. Il faut d'abord trouver le douzieme terme de cette progreſſion géométrique 1, 50, 2500, 125000, &c. qui va en augmentant. Ce douzieme terme contient ces chifres, 48, 828, 125, accompagnés de onze zéros, & pour trouver la ſomme demandée, il faudroit, ſuivant l'article VII, multiplier encore ce douzieme terme par le ſecond 50: ôter 1, quarré du premier terme de ce produit, & diviſer le reſte par 49, différence du ſecond ter-

me au premier. On conçoit qu'il viendroit un nombre très-grand.

REMARQUE.

Cette queſtion eſt embarraſſante dans le calcul, à cauſe de la grande raiſon qui eſt entre les termes: mais on pourra appliquer ici la quatrieme queſtion, & demander quel ſeroit le prix des vingt-quatre clous d'un cheval, en payant le premier 1 denier, le ſecond 2 deniers, le troiſieme 4 deniers, &c. On trouvera que ce prix ſeroit de 16,777,215 deniers, ou de 69,905 livres 1 ſol 3 deniers.

La queſtion cinquieme trouveroit ici ſa place, ſi l'on vouloit chercher quelle ſeroit la ſomme qu'il faudroit payer pour les trente-deux terres aux conditions qui ont été offertes.

QUESTION VII.

JE renfermerai dans cette queſtion pluſieurs autres, que je ne ferai que propoſer. On cherchera quel peut avoir été le nombre des hommes deux cens ans après Adam, en ſuppoſant qu'ils ayent tous vécu, & que cette famille fût ſeulement augmentée de quatre perſonnes la premiere dixaine d'années, de huit la ſeconde dixaine, de ſeize la troiſieme dixaine, & ainſi de ſuite de dix ans en dix ans, ſuivant la progreſſion double, qui eſt 2, 4, 8, 16, &c. le nombre des termes de cette progreſſion eſt 20, dont il faut trouver le dernier par l'article VI, & la ſomme de tous ces termes par l'article VII. On jugera de cette ſomme par le dernier terme, qui eſt d'un million 48 mille 576 perſonnes.

2. On

2. On examinera de combien la famille de Jacob, qui entra en Egypte avec 70 perſonnes, put être augmentée 200 ans après ſon arrivée, en ſuppoſant ſeulement que dans les vingt premieres années elle ait été augmentée de trois fois autant, c'eſt-à-dire, qu'au bout de 20 ans il y ait eu 210 perſonnes, & ainſi de ſuite : ce qui eſt très-croyable. On trouvera qu'à la fin des vingt dernieres années elle a pu être compoſée d'un million 177 mille 810 perſonnes. Art. VI.

3. Qui croira que les revenus du grand-ſeigneur ne ſeroient pas capables de nourrir pendant douze ans la race d'une truie qui auroit porté d'une ventrée 6 petits cochons, dont 2 ſeroient mâles & les quatre autres femelles. C'eſt cependant une choſe très-véritable, en ſuppoſant même que les quatre femelles ne portent chacune la premiere année que ſix petits cochons, dont 4 ſeront encore femelles & 2 mâles, & que chaque femelle en porte autant les années ſuivantes pendant douze ans. Cela ſuppoſé, on connoîtra que le nombre de tous les cochons, pendant ce tems, montera à 33 millions 554 mille 230. Suppoſant à préſent qu'il ne faille qu'un écu par an pour chaque cochon, on jugera ſi le grand-ſeigneur eſt aſſez puiſſant pour nourrir la race d'une ſeule truie pendant douze ans.

REMARQUE.

Il y a une attention à faire ſur le calcul de cette ſomme. Il faut partager le nombre 6 des premiers petits cochons en deux termes, dont l'un, qui eſt 2, ſera le premier terme de la progreſſion des mâles, & l'autre, qui eſt 4, ſera le premier terme

de la progreſſion des femelles. Ainſi il ſera aiſé de connoître que la premiere progreſſion eſt 2, 4, 8, 16, 32, &c. & que la ſeconde eſt 4, 16, 64, 256, &c. On ajoutera les ſommes des 12 termes de ces deux progreſſions, & l'on aura le nombre des petits cochons, tant mâles que femelles.

4. On ſe convaincra que le monde entier ne pourra contenir toute la ſemence qui ſeroit produite d'un ſeul grain de moutarde pendant vingt-cinq ans, ſi on ſuppoſe qu'un grain de moutarde en produiſe mille chaque année.

5. On ſera étonné du nombre prodigieux des poiſſons, ſi la plus grande partie de leurs œufs étoient féconds; il n'y auroit qu'à ſupputer combien il viendroit de carpes d'une ſeule carpe pendant quelques années, & porter un jugement ſemblable pour tous les autres poiſſons.

6. Ce n'eſt point les animaux les plus féconds qui peuvent nous jetter dans l'étonnement: la fécondité des brebis même, qui ne portent qu'une fois par an, pourroit étonner leur maître, ſi on avoit ſoin de conſerver tous les agneaux qui naiſſent pendant quelques années.

On peut connoître, ſuivant ce qu'on a dit dans les articles précédens, en faiſant quelques ſuppoſitions, que tous les agneaux d'un grand troupeau de brebis peuvent ſe monter à plus de 25500 pendant l'eſpace de huit ans.

PROBLEME XII.

Des quarrés magiques.

ON appelle *quarré magique* un quarré diviſé en pluſieurs autres petits quarrés égaux,

ou cases remplies de termes d'une progreſſion qui y ſont tellement diſpoſés, que tous ceux d'une même bande, ou d'un même rang, tant en long qu'en large & en diagonale ajoutés enſemble, font une même ſomme, ou multipliés, donnent un même produit.

Il ſuit de la définition qu'on vient de lire, qu'il y a deux eſpeces de quarrés magiques, les uns ſont formés par les termes d'une progreſſion arithmétique, les autres ſont formés par les termes d'une progreſſion géométrique.

Ces quarrés ſont pairs ou impairs; les quarrés impairs ſont ceux qui contiennent un nombre impair de caſes, & les pairs ſont ceux qui tiennent un nombre pair de caſes.

Des quarrés magiques impairs, formés par des termes en progreſſion arithmétique.

LE quarré magique ſuivant eſt un quarré impair; il eſt diviſé en 25 petites caſes égales, où les 25 premiers nombre naturels 1, 2, 3, 4, &c. ſont tellement diſpoſés, que la ſomme de chaque rang, ſoit de haut en bas, ſoit de droite à gauche, ſoit en diagonale, eſt par-tout 65.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Dans tout *quarré impair*, la ſomme des nombres de chaque rang ou de chaque diagonale, eſt égal au produit de la racine du quarré impair & du terme moyen de la progreſſion arithmétique. La

ſomme 65 des nombres de chaque rang ou de chaque diagonale de ce quarré impair 25, eſt égale au produit de 5 ſa racine, & de 13 terme moyen de la progreſſion arithmétique 1, 2, 3, 4, &c. Ce terme moyen ſe trouve dans la caſe du milieu du quarré, qui contient les nombres naturels, comme on le peut voir dans le quarré ſuivant.

Cette ſomme 65 ſe trouve auſſi en diſpoſant les termes donnés de la progreſſion arithmétique, ſelon leur ſuite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. dans quelques rangs de caſes de ce quarré, qui ſont les deux rangs du milieu qui traverſent le quarré du haut en bas, & de gauche à droite, & chaque rang diagonal, c'eſt-à-dire, qui va d'un angle du quarré à l'autre angle. La même choſe arrivera aux quarrés pairs qui ſont des quarrés qui contiennent un nombre quarré pair de caſes.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Pour diſpoſer magiquement dans les caſes d'un quarré impair, par exemple, de celui-ci, dont le côté eſt 5, ou qui a 25 caſes, autant de nombres donnés en progreſſion arithmétique, comme 1, 2, 3, 4, 5, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier & plus grand 25, écrivez le premier &

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

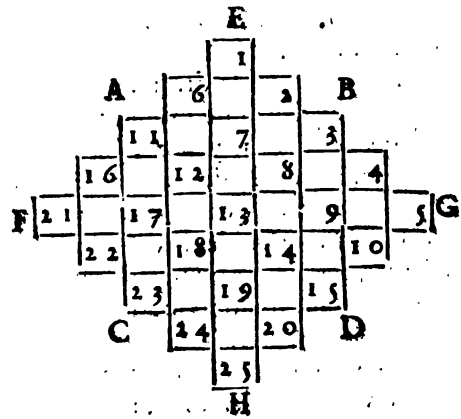
plus petit 1, dans la caſe qui répond immédiatement ſous celle du milieu, où eſt le centre du quarré, & ſuivant la diagonale vers la droite, écrivez le ſecond terme 2 dans la caſe voiſine & plus baſſe de la bande qui ſuit vers la droite. Continuez ainſi juſqu'à ce que vous ayez rempli la plus baſſe caſe, comme il arrive ici au ſecond terme 2.

Après cela, parce qu'en continuant ſelon la diagonale de la gauche vers la droite, le terme ſuivant 3, ſe rencontre en dehors, on le placera à la caſe oppoſée de la bande où il ſe rencontrera. Et parce qu'en continuant ſelon la diagonale vers la droite, le terme ſuivant 4 ſe trouve auſſi en dehors, on le placera dans la caſe oppoſée du rang où il ſe rencontre en dehors. Après quoi on continuera à placer les termes ſuivans toujours en deſcendant ſelon la diagonale vers la droite. Mais parce que le terme 6 tombe dans une caſe qui eſt remplie, ſçavoir, dans celle où il y a 1, on rétrogradera ſelon la diagonale de la droite vers la gauche, & l'on écrira ce terme 6 dans la ſeconde caſe du rang, où le terme précédent 5 ſe rencontre : en ſorte qu'entre ces deux termes il reſte une caſe vuide ; ce qu'il faut toujours pratiquer, lorſqu'une caſe ſe trouvera remplie.

Enfin on continuera ſelon ces regles à placer les autres termes dans les caſes vuides, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à l'angle du quarré, où dans cet exemple le terme 15 ſe rencontre. Alors comme on ne peut plus ſe conduire ſelon la diagonale en deſcendant vers la droite, pour placer le terme ſuivant 16, on le placera dans la ſeconde caſe d'en haut du même rang. Après quoi les autres termes ſe placeront dans les autres caſes vuides

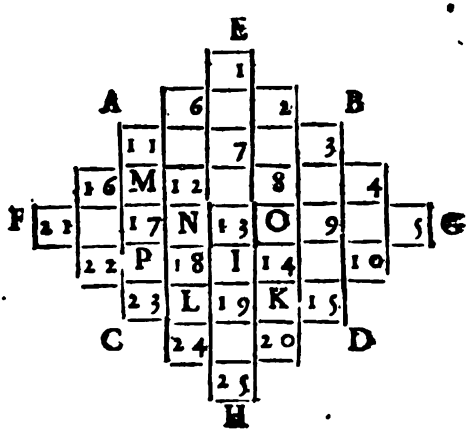
comme les précédens, ſans qu'il puiſſe arriver quelque nouvelle difficulté.

Il ſera aiſé d'exécuter la diſpoſition de ce quarré & des autres de la même eſpece, ſi on ſuit cette méthode. Après avoir fait un quarré impair comme celui-ci, ABCD, de 25 caſes, élevez de chaque côté, en continuant les caſes, excepté celles qui ſont aux coins, A, B, C, D, d'autres lignes hors de ce quarré, telles que vous les voyez ici repréſentées. Ces caſes hors du quarré iront en diminuant; en ſorte qu'il s'en trouvera une qui ſera la plus éloignée de chaque côté, telle que ſont E, F, G, H. Vous choiſirez celle d'en haut E,



pour placer l'unité; enſuite en tirant vers la droite BD, & ſuivant la diagonale, vous placerez dans une ſeconde caſe le nombre 2, puis en ſuivant toujours la meme diagonale, vous placerez les nombres 3, 4, 5, dans les caſes du quarré &

hors du quarré, juſqu'à ce que vous ſoyez parvenu à la caſe unique G, la plus éloignée hors du quarré, du coté BD, qui eſt à droite. Après cela vous retournerez à la ſeconde caſe hors du quarré à côté de 1 vers la gauche, où vous marquerez 6; puis en ſuivant toujours la diagonale, & tirant à droite vers BD, vous écrirez les chiffres 6, 7, 8, 9 & 10, qui eſt placé dans une derniere caſe hors du quarré; alors vous reviendrez à la caſe gauche A, la plus proche de celle qui contient 6; vous y écrirez 11, & les autres nombres 12, 13, 14, 15, dans les caſes ſuivantes, en ſuivant la diagonale, & tirant à droite vers BD. Vous ferez pour le réſte des nombres du quarré impair la même choſe qu'on vient de faire, juſqu'à ce que vous ſoyez arrivé au nombre quarré impair, qui eſt ici 25, & qui ſe trouvera dans la derniere caſe d'en bas H, hors du quarré.

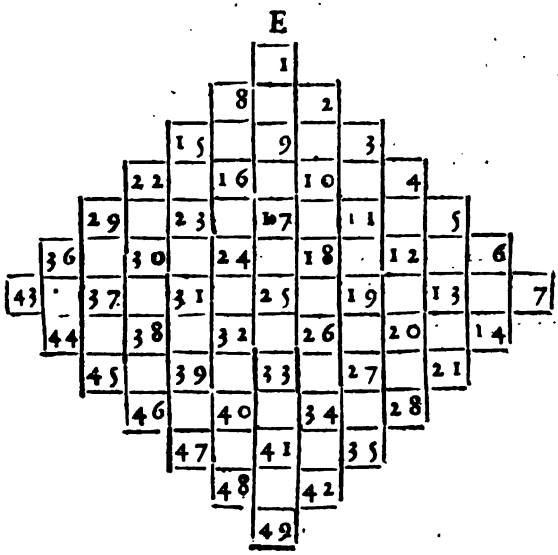


dans les cases du quarré vuide & oppoſées des mêmes rangs où ils ſe trouvent, comme 1 dans I, 2 dans K, 6 dans L, 4 dans M, 5 dans N, 21 dans O, & ainſi des autres, vous aurez la diſpoſition du quarré magique impair de 25, telle qu'elle eſt rapportée ci-deſſus.

Pages 13 & 84.

Vous auriez une autre diſpoſition des nombres dans les caſes, ſi en commençant par la caſe unique hors du quarré d'en haut, au lieu de placer les nombres en tirant vers la droite, vous les placiez en tirant vers la gauche, mettant 2 dans la caſe où ſe trouve 6, mettant 13 dans celle qui eſt occupée par 11, &c.

Obſervez généralement que les nombres des caſes uniques hors du quarré, comme E, F, G, H, ſe doivent trouver dans les caſes vuides les plus proches, mais au-delà de celle qui eſt au centre; comme on le voit dans le quarré précédent, où 1 qui eſt dans E, ſe trouve dans M; 21 qui eſt dans F, ſe trouve dans O; 5 qui eſt dans G, ſe trouve dans N, &c. Ce que l'on peut encore remarquer plus exactement dans le quarré ſuivant, qui eſt celui de 49, où 1 qui eſt dans E, caſe hors du quarré, ſe trouve près, mais au-delà de 25, qui eſt au centre du quarré, & où le nombre 9 qui eſt au-deſſous de l'unité dans une caſe hors du quarré, ſe trouve plus loin & au-delà de 25 dans une caſe du quarré. On doit faire la même remarque à l'égard des autres nombres qui ſe trouvent dans les caſes hors du quarré.



22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

La diſpoſition ſeroit encore différente, ſi on commençoit à mettre l'unité dans quelque autre caſe unique hors du quarré, & qu'on continuât à écrire les autres nombres dans l'ordre qu'on a in-

1	20	23	16	5
4	18	9	12	22
15	7	13	19	11
24	14	17	8	2
21	6	3	10	25

11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
●	8	1	14	22
23	16	9	2	5

11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	13

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

REMARQUES.

LE quarré a été appellé *magique*, parce qu'il étoit en grande vénération parmi les Egyptiens, & les pythagoriciens leurs diſciples, qui pour donner plus d'efficace & de vertu à ce quarré, le dédioient aux ſept planetes en différentes manieres, & le gravoient ſur une lame du métal qui ſympatiſoit avec la planete à laquelle il étoit dédié. Ils l'enfermoient dans un poligone régulier, inſcrit dans un cercle, diviſé en autant de parties égales que le côté du quarré avoit d'unités, avec les noms des anges de la planete, & des ſignes du zodiaque, qu'ils écrivoient dans les eſpaces vuides entre le poligone & la circonférence du cercle circonſcrit; croyant par une vaine ſuperſti-

tion qu'une telle médaille ou taliſman, étoit favorable à celui qui la portoit ſur ſoi en tems & lieu.

Ils attribuoient à Saturne le quarré de 9 caſes, qui a trois pour racine, & 15 pour la ſomme des nombres de chaque bande. A Jupiter le quarré de 16 caſes, qui a 4 pour côté & 34 pour la ſomme des nombres de chaque bande. A Mars le quarré de 25 caſes, qui a 5 pour côté, & 65 pour la ſomme des nombres de chaque bande. Au ſoleil le quarré de 36 caſes, qui a 6 pour côté, & 111 pour la ſomme des nombres de chaque bande. A Vénus le quarré de 49 caſes, qui a 7 pour côté, & 175 pour la ſomme des nombres de chaque bande. A Mercure le quarré de 64 caſes, qui a 8 pour côté, & 260 pour la ſomme des nombres de chaque bande. A la lune le quarré de 81 caſes, qui a 9 pour côté, & 369 pour la ſomme des nombres de chaque bande.

Enfin ils attribuoient à la matiere imparfaite le quarré de 4 caſes, qui a 2 pour côté, & à Dieu le quarré d'une ſeule caſe, qui a pour côté l'unité, qui étant multipliée par elle-même, ne change pas. Par le moyen de ce problême, nous réſoudrons la queſtion ſuivante.

QUESTION.

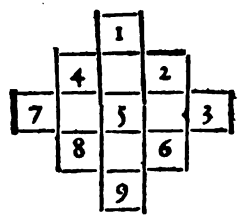
Diſpoſer en trois rangs les neuf premieres cartes, depuis l'as juſqu'au neuf, de ſorte que tous les points de chaque rang pris en long, ou en large, ou en diagonale, faſſent enſemble une même ſomme.

ON diſpoſera magiquement les neuf premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

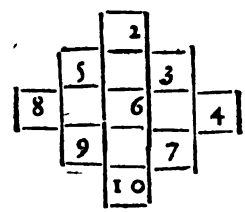
comme vous voyez ici, par la méthode que nous avons enſeignée. Alors on connoîtra que les cartes marquées des mêmes points qui ſont les chiffres de chaque caſe, doivent être rangées de la même façon, afin que la ſomme de tous les points de chaque rang ſoit par tout la même, ſçavoir, 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Voici de quelle maniere on diſpoſera ces cartes, pour les ranger comme elles le ſont dans le quarré magique précédent.



Au lieu de prendre les neuf premieres cartes, on en pourroit prendre neuf autres, pourvu qu'elles fuſſent de ſuite, comme celles-ci, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 : alors elles auroient cette diſpoſition & la ſomme de chaque bande ou diagonale ſeroit 18. On peut encore laiſſer le 2 & prendre le valet, en le faiſant valoir 11, &c.



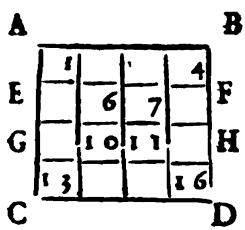
5	10	3
4	6	8
9	2	7

Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progreſſion arithmétique.

LA regle qu'on vient d'enſeigner, eſt générale pour diſpoſer facilement toutes ſortes de quarrés impairs. Il n'en eſt pas de même pour les

quarrés pairs. Ceux-ci ont des regles particulieres, quoique fondées ſur une démonſtration générale. Le quarré de 4 ne peut être diſpoſé magiquement: le quarré de 16 eſt celui de tous les quarrés pairs qui le peut être plus aiſément. C'eſt même par lui qu'on doit commencer quand on veut diſpoſer magiquement un plus grand quarré pair. Voici ce qu'il faut faire.

Ayant fait un quarré A B C D, on remplira d'abord les diagonales AD, BC. Pour y réuſſir, on commencera par compter les nombres ſuivant leur ſuite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. ſur les caſes de la premiere bande AB, de gauche à droite, & on ne marquera que 1 & 4, dans les caſes A & B, qui appartiennent aux diagonales: on comptera enſuite les autres nombres 5, 6, 7, 8, ſur les caſes de la ſeconde bande EF, de gauche à droite, & l'on ne marquera que 6 & 7, dans les caſes qui appartiennent aux diagonales: puis on comptera 9, 10, 11, 12, ſur les caſes de la troiſieme bande GH, de gauche à droite, & l'on ne marquera que 10 & 11, dans les caſes qui appartiennent aux diagonales. Enfin on comptera 13, 14, 15, 16, ſur les caſes de la quatrieme bande CD, de gauche à droite, & l'on ne marquera que les nombres 13 & 16 dans les caſes C & D, qui appartiennent aux diagonales.



Ces diagonales étant ainſi remplies, on remplira les caſes vuides: on commencera par compter les nombres ſuivant leur ordre naturel 1, 2, 3, 4, ſur les caſes de la bande DC, en commen-

çant par la caſe D, & allant ici de droite à gauche, & l'on écrira le 2 & le 3 dans les caſes vuides : on continuera de même par les bandes HG, FE & BA, en allant toujours de droite à gauche. Le quarré ſera rempli de maniere que la ſomme de chaque bande & de chaque diagonale ſera 34, en quelque ſens qu'on les prenne.

A B

	1	15	14	4
E	12	6	7	9 F
G	8	10	11	5 H
	13	3	2	16

C D

On voit bien que pour donner quelque variété à ce quarré pair, on pourroit commencer à compter par la caſe B, & aller de droite à gauche, pour remplir les diagonales, & puis commencer à compter à la ſeconde repriſe par la caſe C, & aller de gauche à droite pour remplir les caſes vuides. En un mot, on peut commencer par telle caſe de la diagonale qu'on voudra, & aller de droite à gauche, ou de gauche à droite, de haut en bas, ou de bas en haut; mais quand on a commencé à compter d'une façon pour remplir les diagonales, il faut aller d'un ſens oppoſé & contraire pour remplir les caſes du milieu. Au reſte, ce ne ſont pas là les ſeules variétés dont eſt ſuceptible le quarré de 16, on ſera peut-être étonné d'entendre dire qu'il peut recevoir 880 diſpoſitions différentes. Nous avons donné la maniere la plus aiſée.

Il n'eſt point néceſſaire que les nombres du quarré pair commencent par l'unité, on peut prendre 16 nombres de ſuite, comme 11, 12, 13, 14, &c. que l'on diſpoſera magiquement par la méthode qu'on vient d'enſeigner.

11	25	24	14
22	16	17	19
18	20	21	15
23	13	12	26

Ce

Ce quarré de 16 eſt le fondement du quarré de 36. Car quand on a formé ce quarré de 16, dont on a pris les termes qui ſont le plus au milieu de 36, on forme une enceinte à l'entour, dans laquelle on diſpoſe les dix premiers nombres & les dix derniers de 36; de telle ſorte que les deux qui correſpondent dans le même rang, ou dans la même diagonale, faſſent la ſomme de 37. Ce que l'on peut examiner dans ce quarré de 36, où la ſomme de chaque bande & de chaque diagonale eſt 111.

1	35	34	30		6	
33	11	25	24	14		4
8	22	16	17	19		29
28	18	20	21	15		9
10	23	13	12	26		27
31	2	3	7	32		36

Pour avoir les 16 nombres qui ſont le plus au milieu de 36, il faut ôter 16 de 36, & diviſer le reſte 20 par 2, le quotient 10 marque qu'il faut rejetter les premiers & les derniers 10 de 36; ainſi les 16 nombres commenceront à 11, & finiront à 26.

Je ne crois pas qu'il ſoit néceſſaire d'avertir, qu'au lieu des nombres, dont la ſuite eſt naturelle, on peut choiſir d'autres nombres qui ſoient dans une progreſſion arithmétique. C'eſt une remarque qui a été faite pour les quarrés impairs, & qui convient auſſi aux quarrés pairs.

On a mis ici le quarré de 64, qui a été fait à peu près de la même maniere que le quarré de 36; la ſomme de chaque rang & de chaque diagonale du quarré de 64, eſt de 260.

1	63	62	4	6	56	60	8
58	15	49	48	44	19	20	7
54	47	25	39	38	28	18	11
53	22	36	30	31	33	43	12
13	42	32	34	35	29	23	52
10	24	37	27	26	40	41	55
14	45	16	17	21	46	50	51
57	2	3	61	59	9	5	64

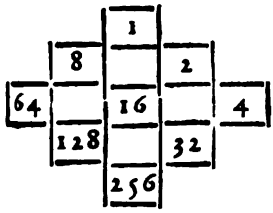
Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progreſſion géométrique.

AU lieu de la progreſſion arithmétique, on peut prendre une progreſſion géométrique, par exemple, cette progreſſion double 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, & alors il arrivera que neuf termes étant diſpoſés magiquement, le produit qui viendra en multipliant enſemble ceux qui ſont dans chaque rang, & dans chaque diagonale, ſera 4096, qui eſt le cube du terme moyen 16.

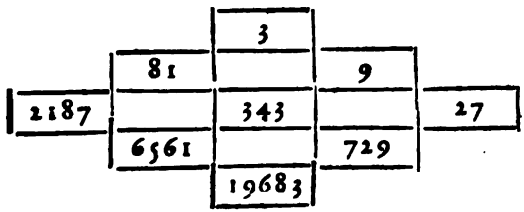
8	256	2
4	16	64
128	1	32

Il n'y a point de regle pour les quarrés en progreſſion géométrique, différente de celle que l'on

enſeigné pour les quarrés en progreſſion arithmétique. Ainſi on connoîtra aiſément que le quarré précédent eſt formé ſelon ce qui a été dit touchant les quarrés impairs, dont les termes ſont en progreſſion arithmétique. Il ſuffira d'en donner la figure, ſans répéter le diſcours.



On peut encore former ce quarré impair, dont les termes ſeront les mêmes que ceux de cette progreſſion géométrique 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, en ſuivant les mêmes regles.



81	19683	9
27	343	2187
6561	3	729

Le produit des nombres de l'un des rangs, eſt 14348907 : il eſt égal au produit des nombres qui ſont contenus dans chacun des autres rangs, ou dans chacune des diagonales. On conçoit que ces ſortes de quarrés magiques peuvent recevoir toutes les variétés dont nous avons parlé dans le quarré magique de la progreſſion arithmétique. Car on peut commencer par tel terme qu'il plaira de la progreſſion, comme par 1243, & continuer juſqu'à ce qu'il y ait aſſez de termes pour remplir les caſes du quarré.

Voici un quarré impair, dont les termes commencent par 729.

19683	4782969	2187
6561	49049	531441
1594323	729	177147

Des quarrés magiques pairs, dont les termes ſont en progreſſion géométrique.

IL n'y a rien à dire de particulier ſur cette ſorte de quarré, on ſe contentera de repréſenter un quarré pair de 16 caſes; il ſera aiſé d'y appliquer toutes les regles & les obſervations qu'on a fait ſur ceux dont les termes ſont en progreſſion arithmétique. Ce quarré contient les 16 premiers termes de la progreſſion double 1, 2, 4, 8, &c. Le produit de chaque rang, ou de chaque diagonale en quelque ſens qu'on les prenne, eſt 1073741824, quarré de 32768. Ce quarré

peut recevoir 880 diſpoſitions différentes, & donner le même produit. C'eſt une choſe très-digne de remarque.

1			8
	32	64	
	512	1024	
4096			32768

1	16384	8192	8
2048	32	64	256
128	512	1024	16
4096	4	2	32768

Des quarrés magiques en proportion harmonique.

NOus ajouterons ici cet autre quarré de neuf caſes, dont les nombres de chaque rang, de quelque maniere qu'on les prenne, c'eſt-à-dire, en long, en travers, ou en diagonale, ſont en proportion harmonique. On peut trouver autant d'autres nombres qu'on voudra qui auront la même propriété, ſi au lieu des nombres précédens on met des lettres, comme vous voyez dans la table ſui-

1260	840	630
504	420	360
315	280	252

vante, où les grandeurs littérales de chaque rang ſont harmoniquement proportionnelles. C'eſt pourquoi en donnant aux trois lettres indéterminées a, b, c, des valeurs différentes, on aura en la place de ces quantités littérales des nombres qui conſerveront dans chaque rang, la proportion harmonique.

a	$\frac{2ac}{a+c}$	c
$\frac{2ab}{a+b}$	$\frac{2bc}{b+c}$	$\frac{2abc}{2ab+ac-bc}$
b	$\frac{2abc}{2ac+ab-bc}$	$\frac{abc}{ab+ac-bc}$

AVERTISSEMENT.

Ceux qui voudront être inſtruits plus à fond des quarrés magiques, pourront conſulter la géométrie de M. Arnaud, les élémens du P. Preſtet, & principalement ce qui en a été dit dans les ouvrages de Meſſieurs de l'académie royale des ſciences, imprimés en 1693.

PROBLEME XIII.

Du triangle arithmétique.

ON appelle triangle arithmétique la moitié d'un quarré diviſé en pluſieurs petits quarrés égaux, qui contiennent les unités, les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c. qu'on a par l'addition continuelle des nombres précédens : les nombres pyramidaux 1, 4, 10, 20, &c. que donne l'addition continuelle des nombres triangulaires; les nombres pyramido-pyramidaux, 1, 5, 15, 35, &c. qui viennent par l'addition continuelle des nombres pyramidaux, & ainſi de ſuite, comme vous voyez dans la figure, qu'il ſuffit de regarder pour la comprendre. Plan. 1, fig. 1.

On appellera diagonale, ou baſe du triangle arithmétique, les quarrés qui ſont traverſés par une ligne ponctuée.

Entre les différens uſages du triangle arithmétique, je ne parlerai que de ceux qui ſervent aux combinaiſons, aux permutations & autres parties du jeu, parce que les autres ſont trop ſpéculatifs pour des récréations mathématiques.

Des combinaiſons.

NOus entendons ici par combinaiſons, tous les différens choix qu'on peut faire de pluſieurs choſes dont le nombre eſt connu, en les prenant en diverſes manieres, une à une, deux à deux, trois à trois, &c. ſans rien changer à l'ordre.

I.

Si l'on propoſe quatre choſes différentes, exprimées par ces quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d*, toutes les diverſes manieres d'en prendre, par exemple, deux différentes, ſçavoir, *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *cd*, ou trois différentes, ſçavoir, *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*, s'appellent combinaiſons. D'où il eſt aiſé de voir que quatre choſes propoſées peuvent être priſes une à une en quatre façons, deux à deux en ſix façons, trois à trois en quatre façons, & quatre à quatre en une maniere ſeulement. De ſorte que 1 ſe combine dans 4 quatre fois, 2, ſix fois, 3, quatre fois, & 4, une fois.

II.

Pour trouver dans un plus grand nombre de choſes différentes, par exemple, de ſept, les diverſes combinaiſons que l'on peut faire en les prenant diverſement, ſoit pour les ajouter enſemble, ou pour les multiplier, comme ſi l'on vouloit ſçavoir toutes les conjonctions poſſibles des ſept planetes, en les prenant deux à deux, c'eſt-à-dire, ſi l'on vouloit ſçavoir combien de fois 2 ſe combine dans 7, ajoutez l'unité à chacun des deux nombres donnés 2, 7, pour avoir ces deux autres nombres 3, 8, qui font connoître que dans la troiſieme caſe de bas en haut, ou de haut en bas, de la huitieme diagonale du triangle arithmétique, on trouvera le nombre des combinaiſons qu'on cherche, ſçavoir, 21, qui marque les diverſes rencontres des ſept planetes conjointes deux à deux. Et pour connoître la huitieme diagonale, & la troiſieme caſe de cette diagonale, comptez huit dans le premier rang horiſontal, marqué d'unités, en com-

mençant par la gauche, ou dans le premier rang perpendiculaire, marqué auſſi d'unités en commençant par le haut, puis prenez la troiſieme caſe en comptant par l'un ou l'autre de ces deux premiers rangs, & ſuivant la diagonale ponctuée.

Ou bien, parce que les deux nombres donnés ſont 2, 7, & que le plus petit eſt 2, ajoutez enſemble tous les nombres du deuxieme rang juſqu'à la ſeptieme diagonale, parce que le plus grand nombre donné eſt 7, ſçavoir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, & la ſomme 21 ſera le nombre qu'on cherche.

III.

Si vous n'avez point de triangle arithmétique qui même peut manquer, lorſque le nombre des choſes propoſées paſſera 9, parce que nous ne l'avons pas prolongé au-delà, quoique cela ſoit facile, apprenez cette autre regle, qui eſt générale pour quelque nombre que ce ſoit.

Etant donné, par exemple, les deux nombres 2, 7, pour ſçavoir combien de fois le plus petit 2 ſe combine dans le plus grand 7, faites des deux nombres donnés 2, 7, ces deux progreſſions arithmétiques 2, 1, & 7, 6, qui décroiſſent de l'unité, & qui ne doivent avoir que deux termes, ſçavoir, autant que le plus petit nombre donné 2 comprend d'unités. Après cela multipliez enſemble les termes de chaque progreſſion, ſçavoir, 7 par 6, & 2 par 1. Diviſez le premier produit 42 par le ſecond 2, & le quotient 21 ſera le nombre des combinaiſons de 2 en 7.

C'eſt par cette maniere, ou par la précédente, qu'on trouvera que 3 ſe combine dans 7, 35 fois, & 4 auſſi 35 fois, que 5 s'y combine 21 fois, & 6 ſeulement 7 fois.

D'où il ſuit que le nombre de toutes les combinaiſons qui ſe peuvent faire dans ſept choſes différentes en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, ſix à ſix, ſept à ſept, eſt 127, que l'on trouve en ajoutant tous les nombres particuliers des combinaiſons 7, 21, 35, 21, 7, 1, qui conviennent aux nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

IV.

Mais cette ſomme 127 ſe peut trouver plus facilement, en faiſant cette progreſſion géométrique double, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, qui doit être compoſée de ſept termes, parce que le nombre compoſé des choſes à combiner eſt 7. Car la ſomme 127 de tous ces termes ſera le nombre qu'on cherche.

D'ou il ſuit que pour avoir toutes les combinaiſons de pluſieurs choſes propoſées, il faut mettre autant de termes de la progreſſion double 1, 2, 4, &c. qu'il y a de choſes propoſées, & faire une ſomme de tous les termes; * cette ſomme donnera les differentes manieres dont ces choſes peuvent être combinées, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, &c. Si on a propoſé quatre choſes différentes, il faut ſe ſervir des quatre premiers termes de la progreſſion double, 1, 2, 4, 8, dont la ſomme * 15 montre que quatre choſes peuvent être combinées en quinze manieres, en les prennant une à une, deux à deux, &c. S'il y a cinq choſes propoſées, il faut employer les cinq premiers termes de la progreſſion double, 1, 2, 4, 8, 16, dont la ſomme * 31, fait connoître qu'on peut combiner cinq choſes en trente-une manieres. Ainſi des autres.

* Prob. XI, p. 68.

REMARQUE.

Au lieu de prendre la ſomme des termes, on peut prendre le terme qui ſuit immédiatement le dernier terme donné, & le diminuer de l'unité; le reſte ſera le nombre qui exprimera en combien de manieres on pourra combiner les choſes données. Ainſi dans le premier exemple de cet article IV, le terme qui ſuit 64 eſt 128, qu'il faut diminuer de l'unité; ce reſte 127 eſt le nombre cherché. De même dans le ſecond exemple, le terme qui ſuit 16 eſt 32, qui diminué de l'unité donne 31 pour le nombre demandé.

V.

On peut encore trouver cette ſomme 127 plus facilement en cette ſorte. Otez l'unité du nombre propoſé 7, le reſte 6 fait voir qu'il faut prendre la ſixieme puiſſance de 2, qui eſt 64, dont le double 128 étant diminué de l'unité, donnera 127 pour le nombre cherché.

VI.

J'ajouterai ici deux méthodes particulieres aux deux nombres 2 & 3, pour trouver combien de fois ils ſe combinent dans un nombre propoſé qui doit être plus grand, par exemple, dans le même nombre donné 7.

Premierement, pour trouver combien de fois 2 ſe combinent dans 7, ôtez ce nombre 7 de ſon quarré 49, & 21, moitié du reſte 42, ſera le nombre des fois que 2 ſe combine dans 7.

Pour trouver combien de fois 3 ſe combine dans 7, ajoutez au cube 343 du nombre donné 7 le double 14 de ce même nombre 7, & ôtez de

la ſomme 357, le triple 147 du quarré 49 du même nombre 7; & 35, ſixieme partie du reſte 210, ſera le nombre des fois que 3 ſe combine dans 7.

VII.

Si on propoſoit de combiner quatre choſes, dont il y eût deux égales & deux différentes, exprimées par ces quatre lettres, *a*, *a*, *b*, *c*, on voit bien qu'on les peut prendre une à une en trois façons, *a*, *b*, *c*, deux à deux en quatre façons, *aa*, *ab*, *ac*, *bc*, trois à trois en trois façons, *aab*, *aac*, *abc*, & quatre à quatre en une ſeule façon, *aabc*; ce qui fait qu'on les peut combiner en tout de 11 manieres différentes. Si on propoſoit cinq choſes, dont il y eût trois égales & deux différentes exprimées par ces lettres, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, on peut les prendre une à une en deux manieres, *a*, *b*, deux à deux en trois manieres, *aa*, *ab*, *bb*, trois à trois en trois manieres, *aaa*, *aab*, *abb*, quatre à quatre en deux manieres *aaab*, *aabb*, & cinq à cinq en une ſeule maniere ſeulement, ce qui fait en tout 11 combinaiſons.

VIII.

Si on veut ſçavoir en combien de manieres ſe peuvent combiner quatre choſes, comme *a*, *a*, *b*, *c*, dont deux ſont les mêmes, & les deux autres ſont différentes, voici ce qu'il faut faire; *a* étant deux fois parmi les choſes données, on prendra ce nombre 2 qu'on gardera à part; on ajoutera l'unité à ce 2, & l'on aura 3, qui ſera multiplié par le nombre des *b*, qui n'eſt ici qu'une fois parmi les choſes données: ainſi l'on aura encore 3 qu'on conſervera; on ajoutera ce 3 avec le 2 déja trouvé, on augmentera la ſomme 5 de l'unité, & l'on

aura 6 qui ſera multiplié par le nombre des *c*, qui n'eſt ici qu'une fois : ainſi l'on aura 6, que l'on ajoutera aux nombres conſervés 2, 3, la ſomme 11 montre qu'on peut combiner en onze manieres différentes ces quatre choſes, *a*, *a*, *b*, *c*.

De même ſi on avoit propoſé ces huit choſes, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c*, *c*, à cauſe que *a* eſt trois fois, on aura 3, que l'on conſervera ; on ajoutera 1 à 3, la ſomme 4 ſera multipliée par 2, nombre des *b*, le produit 8 ſera conſervé ; on ajoutera enſemble 3, 8, & la ſomme 11 ſera augmentée de l'unité ; ce qui donnera 12, qu'on multipliera par 3, nombre des *c*. Le produit 36 ſera ajouté aux nombres conſervés 3, 8, la ſomme 47 montre que ces huit choſes propoſées peuvent être combinées en 47 manieres.

Mais les choſes données étant toutes égales, *a*, *a*, *a*, *a*, le nombre 4 des choſes données fait voir qu'on ne les peut prendre qu'en quatre manieres différentes, ſçavoir, *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*.

IX.

On a vu dans les premiers articles que quatre choſes différentes, *a*, *b*, *c*, *d*, pouvoient être combinées en 15 manieres ; on veut ſçavoir s'il n'y a point un autre nombre des choſes égales ou différentes qui puiſſent être combinées auſſi en quinze manieres. Ajoutez 1 à 15, vous aurez 16.

Premierement, ayant diviſé 16 par 4, il vient 4, qui étant diviſé par 2 donnera 2 ; ayant diviſé ce 2 par 2, il vient 1, qui ne peut plus être diviſé & qu'on néglige. Prenez les trois diviſeurs 4, 2, 2, ôtez de chacun l'unité, il reſtera 3, 1, 1, leſquels ajoutés font 5. Cette ſomme 5, & ces trois reſtes 3, 1, 1, montrent qu'on peut com-

biner en 15 manieres différentes, 5 choſes, dont trois ſont égales, une différente, & une autre encore différente, comme, *a*, *a*, *a*, *b*, *c*.

Secondement, après la premiere diviſion de 16 par 4, on diviſera le quotient 4 par 4, & il vient au quotient 1, qui ne pouvant plus être diviſé, ſera négligé. On prendra les deux diviſeurs 4, 4, de chacun deſquels ayant ôté l'unité, il viendra 3, 3, on ajoutera ces deux reſtes, & l'on aura 6. La ſomme 6 & les deux reſtes 3, 3, font voir qu'on peut combiner en 15 manieres ſix choſes, dont trois ſont égales, & trois autres ſont encore égales, telles que ſont, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*.

Troiſiemement, on diviſera 16 par 8, il viendra 2; ce quotient 2 diviſé encore par 2, donnera 1, qui ſera négligé. De chacun de ces diviſeurs 8, 2, on ôtera l'unité; on ajoutera les reſtes 7, 1 enſemble, la ſomme 8 & les reſtes 7, 1, montrent qu'on peut combiner en 15 manieres différentes huit choſes, dont 7 ſeront égales, & une ſera différente, comme *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b*.

Quatriemement, on diviſera 16 par 16, le quotient eſt 1 qu'on négligera. Le ſeul diviſeur eſt 16, dont on ôtera l'unité; le reſte 15 fait connoître qu'on peut combiner en quinze façons quinze choſes égales, exprimées par ces caracteres, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*.

Enfin ſi on diviſe 16 par 2, & ſon quotient 8 encore par 2, puis 4 par 2, & ce 2 par 2, on trouvera que quatre choſes différentes peuvent être combinées en quinze manieres différentes, parce qu'il reſtera quatre unités, après avoir ôté l'unité des quatre diviſeurs, 2, 2, 2, 2.

REMARQUE.

On voit par cet article IX, qu'on peut prendre tel diviſeur qu'on voudra, & les changer dans la ſuite de la diviſion, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à l'unité. On pourra examiner combien de choſes peuvent être combinées un certain nombre de fois, comme 11 fois, 22 fois, &c. il faut toujours ajouter 1 au nombre propoſé, comme ſi on propoſe 11, j'ajoute l'unité & je diviſe 12 ou par 6, ou par 4, ou par 3, ou par lui-même.

Pour donner plus de facilité à diſtinguer ces diviſeurs, on décrira d'abord le nombre propoſé, augmenté de l'unité, & au-deſſous on écrira ſon diviſeur, le quotient s'écrira à côté du nombre propoſé dans une colonne ſéparée : le même diviſeur ou un autre, s'écrira au-deſſous de ce quotient, & le ſecond quotient à côté du premier dans une troiſieme colonne ; le troiſieme diviſeur s'écrira au-deſſous de ce dernier quotient, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à l'unité, comme on le voit dans ces tables.

Nombre propoſé augmenté de l'unité.	12.	6	3	1 Quotiens.
Premier diviſeur	2	2	3	Diviſeurs.
	1	1	2	Diviſeurs diminués de l'unité.

Même nomb. prop. augmenté de l'unité.	12	3	1	Quotiens.
Premier diviſeur.	4	3		Diviſeurs.
	3	2		Diviſeurs diminués de l'unité.

Même nomb. prop. augmenté de l'unité.	12.	2	1	Quotiens.
Premier diviſeur.	6.	2		Diviſeurs.
	5	1		Diviſeurs diminués de l'unité.

Autre nomb. prop. augmenté de l'unité.	23	1	Quotiens.
Premier diviſeur.	23		Diviſeur unique.
	22		Diviſeur diminué de l'unité.

Ce dernier diviſeur 22 marque qu'il n'y a que 22 choſes égales qui puiſſent être combinées en 22 manieres différentes, puiſque le nombre 23 eſt un nombre premier.

On peut conſulter ce qu'on a dit des moyens de trouver toutes les parties aliquotes de quelque nombre donné. Ce ſera un éclairciſſement pour ce qu'on dit ici.

QUESTION I.

UN quarreau mi-parti de deux couleurs par la diagonale, peut recevoir quatre poſitions différentes. Car l'angle coloré peut être en bas ou en haut, mais à main gauche : ce même angle peut être encore en haut & en bas, mais à main droite. Au lieu d'un quarreau, on peut donc prendre quatre quarreaux, & les regarder dans ces quatre ſituations différentes. Je nommerai ces quatre quarreaux A, B, C, D. La regle des combinaiſons rapportée

rapporté ci-deſſus, art. IV, fait connoître que ces quatre quarreaux peuvent être combinés en 15 manieres différentes. Car ſi on les prend un à un, l'on aura A, B, C, D; deux à deux, on aura AB, AC, AD, BC, BD, CD; trois à trois, on aura ABC, ABD, ACD, BCD; & quatre à quatre, on aura ſeulement ABCD. Ceci n'eſt qu'une application des regles qu'on a données dans les cinq premiers articles précédens. Plan. 2, fig. 1.

QUESTION II.

ON propoſe de combiner quatre de ces mêmes quarreaux, dont deux A, A, ſont égaux & les deux autres ſont B & C. Suivant l'article VIII, on aura A, B, C, en les prenant un à un; AA, AB, AC, BC, en les prenant deux à deux; AAB, AAC, ABC, en les prenant trois à trois; & AABC, en les prenant quatre à quatre; ce qui donne onze manieres différentes de combiner les quarreaux A, A, B, C.

Des permutations.

IL y a une autre ſorte de changemens, que l'on peut appeller *permutations*, où l'on prend les mêmes choſes deux fois, comme ſi l'on veut combiner ces trois nombres 2, 5, 6, en les prenant deux à deux, pour ſçavoir les différentes valeurs qu'ils peuvent produire. En conſidérant les deux premiers nombres en cette ſorte, 25, on dira qu'ils ſont vingt-cinq, & en les conſidérant ainſi, 52, on prononcera qu'ils ſont 52. De même en conſidérant le premier & le troiſieme nombre en cette ſorte 26, on connoîtra qu'ils ſont vingt-ſix,

& en les conſidérant ainſi, 62, on dira qu'ils ſont ſoixante-deux; ainſi des autres: où vous voyez que le nombre des permutations eſt double de celui des combinaiſons.

On ſe ſert des permutations, quand on veut faire des anagrammes, où l'on fait quelquefois des rencontres heureuſes, c'eſt-à-dire, qui conviennent à leur ſujet.

On ſe ſert auſſi des permutations dans le jeu de dez, pour connoître le nombre des haſards qu'auroit celui qui, avec deux dez, entreprendroit de faire, par exemple, 9. Il eſt certain qu'il auroit quatre haſards, parce que 9 ſe peut faire en quatre façons, ſçavoir, par le 4 du premier dez & le 5 du ſecond, ou bien par le 5 du premier & le 4 du ſecond, & encore par le 3 du premier dez & le 6 du ſecond, ou bien par le 6 du premier & le 3 du ſecond.

I.

Plan. 1, fig. 1. Pour trouver avec le triangle arithmétique le nombre des permutations de pluſieurs choſes, on regardera le ſecond rang perpendiculaire de ce triangle, comme étant le premier; on cherchera dans ce ſecond rang le nombre des choſes propoſées; on ne fera attention qu'à la baſe dans laquelle il ſe trouvera. On multipliera ce nombre trouvé par l'unité; celui de la caſe ſuivante, qui ſera regardé comme le deuxieme, par 2; celui de la troiſieme caſe, par 3 fois 2, ou 6; celui de la quatrieme caſe par 4 fois 6, ou 24; celui de la cinquieme caſe par 5 fois 24, ou 120; celui de la ſixieme caſe par 6 fois 120; ou 720, & ainſi de ſuite, en multipliant toujours le nombre de la

caſe par le produit précédent. Le produit de chaque caſe de la baſe ſelon leur ordre, ſera le nombre des permutations des choſes propoſées priſes une à une, deux à deux, trois à trois, &c. Mais quand on ſera parvenu à l'unité du premier rang parallele, on répétera le dernier nombre, qui ſera auſſi le nombre des permutations des choſes priſes ſelon le nombre qu'on les aura propoſées. Un exemple éclaircira cette regle. Plan. 1, fig 1.

Suppoſant qu'on ait propoſé quatre choſes, *a*, *b*, *c*, *d*, pour ſçavoir quel eſt le nombre de leurs permutations, on cherchera dans le ſecond rang perpendiculaire le nombre 4, qui ſe trouve dans la baſe du cinquieme triangle. Ce nombre 4, multiplié par l'unité, eſt le nombre des permutations de ces quatre choſes priſes une à une. On multipliera enſuite le nombre 6 de la caſe ſuivante, qui eſt regardée comme la deuxieme dans la même baſe, par 2, le produit 12 ſera le nombre des permutations des choſes propoſées, priſes deux à deux; puis on multipliera le nombre 4 de la troiſieme caſe de la même baſe par trois fois 2 ou 6, le produit 24 eſt le nombre des permutations des choſes propoſées, priſes trois à trois: enfin comme on eſt parvenu à l'unité, qui eſt dans le premier rang parallele, & qui eſt commune à la baſe du cinquieme triangle, on répétera le même produit qu'on vient de trouver, ſçavoir, 24 qui ſera auſſi le nombre des permutations des choſes priſes quatre à quatre.

Si l'on veut ſçavoir le nombre de toutes ces permutations, on ajoutera les produits trouvés 4, 12, 24, 24; leur ſomme 64 eſt le nombre de toutes ces permutations: c'eſt-à-dire, que quatre choſes différentes peuvent recevoir 64 change-

mens différens, ſans être priſes deux fois dans aucune de ces permutations.

II.

Il n'eſt point néceſſaire de ſe ſervir du triangle arithmétique, pour trouver toutes les permutations, ou les tranſpoſitions poſſibles de pluſieurs choſes, par exemple, de ces quatre lettres, AMOR, priſes quatre à quatre; on fera cette progreſſion arithmétique 1, 2, 3, 4, compoſée d'autant de termes qu'il y a de lettres propoſées, en ſorte que le premier terme ſoit toujours l'unité, & que le dernier exprime le nombre des lettres : & alors en multipliant enſemble tous ces termes, le produit

AMOR	MARO	OAMR	ROMA
AMRO	MAOR	OARM	ROAM
AOMR	MOAR	OMAR	RMAO
AORM	MORA	OMRA	RMOA
ARMO	MRAO	ORAM	RAMO
AROM	MROA	ORMA	RAOM

24 ſera le nombre pes permutations, ou changemens différens que l'on peut faire des quatre lettres propoſées AMOR, comme vous voyez ici.

III.

C'eſt de la même façon que l'on trouvera le nombre des permutations d'une autre multitude de lettres, ſçavoir, en faiſant une progreſſion d'autant de nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, &c. qu'il y aura de lettres à combiner enſemble, & en multipliant enſemble tous les termes de cette progreſſion. Ainſi vous trouverez que cinq lettres ſe peuvent combi-

ner ſimplement, ou tranſpoſer en 120 manieres, ſix en 720, & ainſi des autres, comme vous voyez dans la table ſuivante, qui montre que les 23 lettres de l'alphabeth ſe peuvent combiner en 25852016738884976640000 façons.

1	1. A.
2	2. B.
3	6. C.
4	24. D.
5	120. E.
6	720. F.
7	5040. G.
8	40320. H.
9	362880. I.
10	3628800. K.
11	39916800. L.
12	479001600. M.
13	6227020800. N.
14	87178291200. O.
15	1307674368000. P.
16	20922789888000. Q.
17	355687428096000. R.
18	6402373705728000. S.
19	121645100408832000. T.
20	2432902008176640000. V.
21	51090942171709440000. X.
22	1124000727777607800000. Y.
23	25852016738884976640000. Z.
24	620448401733239439360000.
25	15511210043330985984000000.

Cette table eſt aiſée à conſtruire; car ayant connu, par exemple, que 4 lettres ſe peuvent combiner ou tranſpoſer en 24 façons, ſi l'on multiplie

ce nombre 24 des permutations par le nombre 5, qui ſuit immédiatement après le 4, on aura 120 pour le nombre des permutations de 5 lettres, lequel étant multiplié par le nombre ſuivant 6, on aura 720 pour le nombre des permutations de 6 lettres, lequel étant multiplié par le nombre ſuivant 7, le produit 5040 ſera le nombre des permutations de 7 lettres, & ainſi de ſuite.

QUESTION I.

D'Où il ſuit que ſi on veut ſçavoir en combien de manieres différentes ſept perſonnes peuvent ſe ranger à table, il n'y a qu'à multiplier les premiers nombres naturels juſqu'à ſept de cette ſorte, 1 fois 2 fois 3 fois 4 fois 5 fois 6 fois 7. Le produit 5040 fait voir que ſept perſonnes peuvent être rangées à une table en 5040 manieres différentes.

QUESTION II.

APrès avoir fait attention à ce que l'on vient de dire, on n'aura point de peine à croire que huit enfans de chœur puiſſent tellement changer de place au chœur trois fois par jour, à matines, à la meſſe & à vêpres, qu'ils ſeroient environ 37 ans à achever ces changemens différens. Il eſt vrai que c'eſt une choſe ſurprenante, mais il eſt conſtant que huit choſes peuvent recevoir quarante mille trois cens vingt changemens; & comme il s'en feroit trois par jour, ſi on diviſe 40320 par 3, on aura 13440 jours, qui font près de 37 ans, pendant leſquels il faudroit faire chaque jour trois changemens.

QUESTION III.

ON connoîtra par le même moyen que les huit mots de ce vers fait à l'honneur de la Sainte Vierge, peuvent recevoir les mêmes chan-

Tot tibi ſunt dotes, Virgo, quot ſidera cœlo.

gemens, étant pris huit à huit, ſi on ne ſe ſoucie pas d'obſerver la meſure du vers : mais ſi on veut garder la meſure du vers hexametre, au lieu de 40320 permutations, ils n'en recevront que 3276. C'eſt-à-dire, que les mots de ces vers pourront avoir 3276 ſituations, & conſerver dans chacune de ces ſituations la meſure du vers hexametre.

QUESTION IV.

LEs douze apôtres ayant diſputé qui d'entr'eux ſeroit le premier, Jeſus-Chriſt leur déclara que celui qui voudroit être le premier ſeroit le dernier, & que le dernier deviendroit le premier. Suppoſons qu'après cette leçon d'humilité, chacun voulût céder la premiere place, la ſeconde & la troiſieme place à ſon compagnon, & qu'ainſi ils euſſent réſolu de ne demeurer jamais enſemble dans une même diſpoſition, on demande en combien de manieres ils auroient pu changer de place, en ſorte qu'ils ne ſe fuſſent jamais rencontrés les uns à l'égard des autres dans la même ſituation. *Réponſe.* Ils auroient pu changer en quatre cens ſoixante-dix-neuf millions mille ſix cens manieres différentes.

Si l'on ſuppoſe que les onze apôtres euſſent toujours obſervé de laiſſer la premiere place à ſaint Pierre, ils auroient pu changer de place en

trente-neuf millions neuf cens ſeize mille huit cens manieres différentes.

QUESTION V.

MAis ce qui paroîtra encore bien plus ſurprenant, c'eſt le calcul énorme qu'on va faire pour les différens changemens qui arriveroient à 24 noms qui ne rempliroient que deux lignes, ſuppoſant qu'on pût écrire 1440 lignes en chaque feuille de papier, ou bien 720 fois ces 24 noms, & que chaque rame de papier fût tellement battue qu'elle n'eût qu'un pouce d'épaiſſeur, je dis qu'il faudroit beaucoup plus de rames de papier pour écrire tous les changemens de ces 24 noms qu'il n'en pourroit contenir depuis le centre de la terre juſqu'au firmament, en les mettant les unes ſur les autres. Car ſuppoſant qu'il y a 28,862, 640,000,000 de pouces, du centre de la terre aux étoiles il faudroit 1,751,245,560,364,553, 942 rames de papier & plus, pour écrire les 62044840173323943936000 changemens que peuvent recevoir ces 24 noms, parce que chaque rames de papier contenant 500 feuilles, & chaque feuille 720 changemens, chaque rame de papier contiendroit 360000 de ces changemens. Or diviſant les 24 nombres 626, &c. par celui que contiendroit chaque rame, il vient 1,751, &c. qui eſt un nombre de pouces plus grand que celui qu'il y a depuis le centre de la terre juſqu'au firmament.

On voit aiſément qu'il eſt impoſſible d'écrire toutes les permutations de ces 24 noms : car tous les princes du monde ne pourroient payer le papier, quand la rame ne coûteroit que 20 ſols, & cent

mille ſcribes ſeroient 336,047,223,141 ans à écrire toutes les permutations de ces 24 noms, quand ils écriroient chacun une rame par ſemaine & travailleroient nuit & jour; en ſorte que chaque perſonne remplît 71 feuilles par jour, qui ſeroient cinq millions deux cens milles rames par an. Suppoſons encore qu'on voulût donner à chacun de ces ſcribes deux cens livres par an, ce ſeroit vingt millions par an, outre les cinq millions deux cens mille livres pour le papier. Comme il faudroit continuer cette dépenſe pendant 336,047,223,141 ans, elle ſe monteroit à la ſomme de ſix cens nonante-ſix quintillons, ſix cens ſept quadrillons, ſix cens vingt trillons, deux cens trente-un billons, cinq cens trente-deux millions de livres.

L'imagination ſe perd dans ces ſortes de ſupputations, qui cependant ſont très-vraies, puiſqu'elles ſont fondées ſur les principes certains de l'arithmétique.

QUESTION VI.

ON veut ſçavoir combien de permutations peuvent recevoir les quatre quarreaux A, B, C, D, mi-partis de deux couleurs par la diagonale, pris un à un, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre. Pour y procéder avec ordre on cherchera toutes les combinaiſons de ces quatre quarreaux, qu'on a trouvé être A, B, C, D, pris un à un; AB, AC, AD, BC, BD, CD, pris deux à deux; ABC, ABD, ACD, BCD, pris trois à trois, & ABCD, pris quatre à quatre. Il faut enſuite chercher combien peuvent recevoir de permutations ces quarreaux ſuivant les quatre différentes combinaiſons qu'on vient de voir. Plan. 2, fig. 1.

Plan. 2, fig. 1. Les quatre premieres combinaiſons des quarreaux A, B, C, D, pris un à un, ne donnent point d'autres permutations; les ſix combinaiſons ſuivantes des quarreaux AB, AC, &c. pris deux à deux, en donnent chacune deux; art. III & queſt. I, ce qui fait 12 permutations. Les quatre combinaiſons des quarreaux ABC, &c. pris trois à trois, donnent chacune ſix permutations, ſart. III, ce qui fait 24 permutations. Enfin la ſeule combinaiſon des quarreaux ABCD, pris quatre à quatre, donne encore 24 permutations, art. III. Si l'on ajoute toutes ces permutations 4, 12, 24, 24, elles feront la ſomme de 64. C'eſt-à dire, que quatre quarreaux ABCD, pris un à un, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre, peuvent êtres changés en ſoixante-quatre manieres différentes.

QUESTION VII.

SI on veut que ces quarreaux ſoient pris deux à deux, & que chacun ſoit répété, il eſt aiſé de connoître qu'il y aura ſeize permutations. Car par l'article II ou III des combinaiſons, on trouve que 2 en quatre peut être combiné ſix fois; & par l'article II, & queſtion I, des permutations, on ſçait que 2 choſes ne peuvent recevoir que 2 changemens; ainſi ces ſix combinaiſons donneront 12 permutations, auſquels ſi l'on joint les quatre AA, BB, CC, DD, de chaque quarreau répété, on aura 16 permutations.

REMARQUE.

Ce que l'on vient de dire des combinaiſons jointes aux permutations, fait entrevoir que qua-

tre quarreaux peuvent fournir des compartimens & des deſſeins à l'infini. C'eſt ce qu'a heureuſement exécuté le pere Douat dans un traité très-curieux qu'il vient de faire paroître * ſur un mémoire que le pere Sebaſtien Truchet préſenta à l'académie royale des ſciences en 1704. On y verra que ces quatre quarreaux pris quatre à quatre, répétés & permutés, forment 256 figures différentes. On verra avec étonnement qu'en prenant ces 256 figures deux à deux, trois à trois, & ainſi de ſuite juſqu'à 256, on peut trouver un nombre prodigieux de compartimens, dont les deſſeins ſeront tous différens. On pourra s'exercer ſoi-même en faiſant des quarreaux de cartons mipartis de deux couleurs par la diagonale, & les diſpoſant en toutes les façons qu'on imaginera.

* en 1722.

Cet ouvrage n'eſt pas ſeulement curieux, il eſt encore très-utile, particulierement aux architectes, qui y trouveront une ſource intariſſable pour le carrelage.

Des partis du jeu.

ON appelle *parti* en matiere du jeu, la juſte diſtinction, ou le réglement de ce qui doit appartenir à pluſieurs joueurs de l'argent qui eſt au jeu, & qu'ils jouent en un certain nombre de parties proportionnellement à ce que chacun a droit d'eſpérer de la fortune par le nombre des parties qui lui manquent pour achever.

On ſuppoſe que deux joueurs ont mis chacun 40 piſtoles au jeu. Dans ce cas cet argent ne leur appartient plus, parce qu'en le mettant au jeu ils en ont quitté la propriété. Mais en revanche ils ont le droit d'attendre ce que le haſard peut leur

en donner, ſuivant les conditions dont ils ſont convenus avant que de jouer. On ſuppoſe encore qu'ils jouent 80 piſtoles en trois parties, que le premier ait une partie, & que le ſecond n'en ait point, c'eſt-à-dire, qu'il manque deux parties au premier pour gagner, & trois au ſecond. Enfin ſi les joüeurs veulent ſe ſéparer en renonçant à l'attente du haſard, pour rentrer chacun dans la propriété de quelque choſe, le premier à raiſon des deux parties qui lui manquent, & le ſecond à raiſon des 3 parties qu'il lui faut pour gagner tout l'argent; on demande quelle eſt la portion que chacun des joueurs doit retirer de l'argent qu'ils ont mis au jeu. On peut trouver cette portion, ou ce parti, par le moyen du triangle arithmétique, en cette ſorte.

Parce que nous avons ſuppoſé qu'il manque au premier joueur 2 parties, & trois au ſecond pour gagner, & que la ſomme des deux nombres 2 & 3 eſt 5, il faut prendre dans la cinquieme diagonale du triangle arithmétique, la ſomme 5 des deux premiers nombres 1, 4, à cauſe des deux parties qui manquent au premier joueur, & la ſomme 11 des 3 autres 6, 4, 1, à cauſe des trois parties qui manquent au ſecond joueur, & ces deux dernieres ſommes 5, 11, donneront la raiſon réciproque des deux partis qu'on cherche; de ſorte que le parti de celui à qui il ne manque que 2 parties eſt au parti de celui à qui il en manque 3, comme 11 eſt à 5.

Plan. 1, fig. 1.

Mais pour déterminer ces deux partis, c'eſt-à-dire, pour aſſigner à chacun la part des 80 piſtoles qui ſont au jeu, à raiſon des avantages qu'il a, il faut diviſer ce nombre 80 en deux parties proportionnelles aux deux termes 11, 5; ce qui ſe fera en

multipliant ſéparément par ces deux termes 11, 5, le nombre 80 des piſtoles qui ſont au jeu, & diviſant chacun des deux produits 880, 400, par la ſomme 16 des deux mêmes termes 11, 5, on aura 55 pour le nombre des piſtoles que doit emporter le premier joueur qui a une partie, & 25 pour le nombre des piſtoles que doit prendre le ſecond joueur qui n'a point de partie.

Pareillement s'il manque 1 partie au premier joueur, & 2 au ſecond pour gagner, on ajoutera enſemble ces deux nombres de parties 1, 2, & parce que leur ſomme eſt 3, on prendra dans la troiſieme diagonale du triangle arithmétique, le ſeul & premier nombre 1, & la ſomme 3 des deux autres 2, 1 : ces deux nombres 1, 3, font connoître que le parti du premier joueur eſt au parti du ſecond, comme 3 à 1. Et parce que la ſomme de ces deux termes 1, 3, eſt 4, il s'enſuit que le premier joueur doit avoir les $\frac{3}{4}$ des 80 piſtoles qui ſont au jeu, & le ſecond ſeulement $\frac{1}{4}$. Par conſéquent il appartient 60 piſtoles au premier joueur, & 20 au ſecond, dans la ſuppoſition que nous avons faite qu'ils veulent ſe ſéparer ſans continuer le jeu.

Par-là vous voyez que ſi le jeu eſt dans cet état, qu'il manque au premier joueur une partie, & au ſecond deux parties pour achever, le premier joueur pourroit parier au pair 3 contre 1.

On peut réſoudre ces ſortes de queſtions ſans le ſecours du triangle arithmétique, en cette ſorte.

Puiſqu'il manque au premier joueur une partie pour achever, & qu'il en manque deux au ſecond, on conſidérera que ſi les joueurs continuoient de 1 Cas

jouer, & que le ſecond gagnât une partie, il lui manqueroit comme au premier une partie pour achever, & que dans ce cas les deux joueurs ayant des haſards égaux, leurs partis ſeroient auſſi égaux, par cette regle générale, qui porte que le parti du premier joueur eſt au parti du ſecond, en même raiſon que le nombre des haſards qui peuvent faire gagner le premier, au nombre des haſards qui peuvent faire gagner le ſecond. Ainſi dans cette ſuppoſition le parti de chacun ſeroit la moitié de l'argent qui eſt au jeu.

Il eſt donc certain que ſi le premier gagne la partie qui ſe va jouer, tout l'argent qui eſt au jeu lui appartiendra, & que s'il la perd, il ne lui en appartiendra que la moitié. C'eſt pourquoi, s'ils veulent ſe ſéparer ſans jouer cette partie, le premier doit avoir la moitié de l'argent qui eſt au jeu, & encore la moitié de la moitié du même argent, c'eſt-à-dire, qu'il doit avoir les $\frac{3}{4}$ de cet argent. Le reſte $\frac{1}{4}$ appartiendra au ſecond. Car il eſt évident que ſi un joueur prétend une certaine ſomme en cas de gain, & une ſomme moindre en cas de perte, le ſort étant égal, ſon parti eſt que ſans jouer, il lui appartient la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble.

2. *Cas.* Ce premier cas ſervira à réſoudre le ſuivant, qui ſuppoſe qu'il manque au premier joueur une partie pour achever, & au ſecond trois parties. Car ſi le premier gagne une partie, il doit emporter les 80 piſtoles qui ſont au jeu, & s'il perd une partie, en ſorte qu'il n'en faille plus que deux au ſecond pour achever, il appartiendra au premier les $\frac{3}{4}$ de l'argent, *par le premier cas.* Ainſi

en cas de gain, le premier emportera tout l'argent; & en cas de perte, il ne lui en appartiendra que les $\frac{3}{4}$. C'eſt pourquoi en cas de parti, il ne lui en doit appartenir que la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire $\frac{7}{8}$, ou 70 piſtoles. Le reſte $\frac{1}{8}$, ou 10 piſtoles appartiendront au ſecond.

Ce ſecond cas ſervira de la même façon à réſoudre le ſuivant, qui ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & trois au ſecond. Car ſi le premier gagne une partie, il doit avoir les $\frac{7}{8}$ de l'argent qui eſt au jeu, par le 2 *cas*; & s'il perd une partie, en ſorte qu'il n'en faille plus que deux au ſecond pour gagner, ſçavoir, autant qu'il en manque au premier, chacun doit avoir pour ſon parti la moitié de l'argent qui eſt au jeu. C'eſt pourquoi en cas de gain, le premier emportera $\frac{7}{8}$ de l'argent qui eſt au jeu, & $\frac{1}{2}$ en cas de perte, & ainſi en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire $\frac{11}{16}$, ou 55 piſtoles. Le reſte $\frac{5}{16}$, ou 25 piſtoles, appartiendront au ſecond. 3. *Cas.*

Le ſecond cas ſervira encore à réſoudre ce quatrieme, qui ſuppoſe qu'il manque au premier joueur une partie pour achever, & quatre au ſecond. Car ſi le premier gagne une partie, il remportera les 80 piſtoles qui ſont au jeu, & s'il en perd une; en ſorte qu'il n'en faille plus que trois au ſecond pour achever, il appartiendra au premier les $\frac{7}{8}$ de tout l'argent, par le 2. *cas.* Ainſi puiſqu'en cas de gain, le premier doit emporter 4. *Cas.*

tout l'argent, & qu'en cas de perte il n'en doit emporter que les $\frac{7}{8}$; en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire, $\frac{15}{16}$, ou 75 piſtoles. Le reſte $\frac{1}{16}$, ou 5 piſtoles appartiendront au ſecond.

5. *Cas.* Ce quatrieme cas & le troiſieme ſerviront de la même façon à réſoudre le ſuivant, qui ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & quatre au ſecond. Car ſi le premier gagne une partie, en ſorte qu'il ne lui en manque plus qu'une pour achever, il doit remporter les $\frac{15}{16}$ de l'argent qui eſt au jeu, par le 4. *cas*, & s'il en perd une, en ſorte qu'il n'en manque plus que trois au ſecond, il doit en remporter ſeulement les $\frac{11}{16}$, par le 3. *cas*. Ainſi puiſqu'en cas de gain le premier doit remporter les $\frac{13}{16}$ de tout l'argent, & ſeulement les $\frac{11}{16}$ en cas de perte, il doit en cas de parti prendre la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire, $\frac{13}{16}$, ou 65 piſtoles. Le reſte $\frac{3}{16}$, ou 15 piſtoles, appartiendront au ſecond. Ainſi des autres.

Autrement & plus facilement.

TOus les cas précédens, & tous les autres infinis qui peuvent arriver, peuvent encore ſe réſoudre autrement ſans le ſecours du triangle arithmétique, & plus facilement en cette ſorte.

6. *Cas.* Pour réſoudre, par exemple, le cinquieme cas, où

où l'on ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & 4 au ſecond, de ſorte qu'il leur manque enſemble 6 parties pour achever, ôtez 1 de cette ſomme 6, & parce qu'il reſte 5, on ſuppoſera ces cinq lettres ſemblables *aaaaa* favorables au premier joueur, & pareillement ces cinq lettres ſemblables *bbbbb* favorables au ſecond joueur. On combinera enſemble ces dix lettres, comme vous le voyez dans cette table, où des 32 combinaiſons, les 26 premiers vers la gauche, où ſe rencontre au moins deux *a*, ſeront priſes pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le premier, parce qu'il lui manque deux parties: & les ſix dernieres vers la droite, où il y a au moins quatre *b*, ſeront priſes pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le ſecond, parce qu'il lui manque quatre parties.

aaaaa	*aaabb*	*aabbb*	*abbbb*
aaaab	*aabba*	*abbba*	*bbbba*
aaaba	*abbaa*	*bbbaa*	*babbb*
aabaa	*bbaaa*	*ababb*	*bbabb*
abaaa	*aabab*	*abbab*	*bbbab*
baaaa	*abaab*	*ababb*	*bbbbb*
	baaab	*baabb*	
	baaba	*babba*	
	babaa	*bbaba*	
	ababa	*babab*	

Ainſi le parti du premier joueur ſera au parti du ſecond, comme 26 eſt à 6, ou comme 13 eſt à 3, &c.

Pareillement, pour réſoudre le troiſieme cas, où l'on ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & trois parties au ſe-

cond, de ſorte qu'il leur manque enſemble 5 parties pour achever, ôtez 1 de cette ſomme 5, & parce qu'il reſte 4, ſuppoſez ces quatre lettres ſemblables *aaaa* favorables au premier, & ces quatres lettres ſemblables *bbbb* favorables au ſecond. Combinez enſemble ces huit lettres, comme vous le voyez dans cette table, où des 16 combinaiſons, les 11 premieres à la gauche, où il y a au moins deux *a*, ſeront priſes pour le nombre des haſards qui peuvent faire gagner le premier, parce qu'il lui manque deux parties: & les 5 dernieres vers la droite, où il y a au moins trois *b*, ſeront priſes pour le nombre des haſards qui peuvent faire gagner le ſecond, parce qu'il lui manque trois parties. Ainſi le parti du premier joueur eſt au parti du ſecond, comme 11 eſt à 5, &c.

aaaa	*aabb*	*abbb*
aaab	*abba*	*bbba*
aaba	*bbaa*	*bbab*
abaa	*baab*	*babb*
baaa	*baba*	*bbbb*
	abab	

4. *Cas.* Enfin pour réſoudre le quatrieme cas, où l'on a ſuppoſé qu'il manquoit au premier joueur une partie pour achever, & quatre au ſecond, il vient la même ſomme 5 des parties qui manquent enſemble à ces deux joueurs, on ſe ſervira des 16 combinaiſons précédentes, entre leſquelles on en trouvera 15, où il y aura au moins une lettre *a*, parce qu'il manque au premier joueur une partie, pour le nombre des haſards qui le peuvent faire gagner, & ſeulement une, où il y a quatre *b*, parce qu'il manque au ſecond joueur quatre parties, pour un ſeul haſard qui le peut faire gagner; de ſorte que le parti du même joueur eſt au parti du ſecond, comme 15 eſt à 1. Ainſi des autres.

Du jeu des dez.

POur ſçavoir entre deux joueurs l'avantage que peut avoir celui qui entreprend d'amener, par exemple, 6 avec un dé en un certain nombre de coups, & premierement au premier coup, on conſidérera que le parti à l'entreprendre du premier coup eſt de 1 contre 5, parce que celui qui tient le dé, n'a qu'un haſard pour gagner, & qu'il en a cinq pour ne rien gagner. Par conſéquent pour l'entreprendre en un ſeul coup, il ne doit mettre que 1 contre 5, ou ce qui eſt la même choſe, parier 1 contre 5. Ce qui fait voir que d'entreprendre d'amener 6 avec un dé en un coup, il y a déſavantage.

Pour entreprendre d'amener 6 en deux coups, avec un dé, on conſidérera que c'eſt la même choſe que d'entreprendre en jettant deux dez à la fois d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le dé n'a que 11 haſards pour gagner; car il peut amener 6 avec le premier dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le ſecond : ou bien 6 avec le ſecond dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le premier : ou bien encore 6 avec chaque dé. Mais il y a 25 haſards pour ne rien gagner, comme vous voyez ici.

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5

D'où il eſt aiſé de conclure que celui qui entreprend en deux coups d'amener 6 avec un dé, ne

doit mettre que 11 contre 25, & qu'ainſi il y a déſavantage de l'entreprendre au pair.

Vous prendrez garde que la ſomme 36 de tous les haſards, 11, 25, eſt le quarré du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en deux coups avec un dé, & que le nombre 25 des haſards qui peuvent empêcher celui qui tient le dé de gagner, eſt le quarré du même nombre donné 6 moins 1, c'eſt-à-dire, de 5. C'eſt pourquoi pour trouver le nombre des haſards favorables à celui qui tient le dé, il n'y a qu'à ôter 1 du double 12, du nombre donné 6, & le reſte 11, ſera le nombre qu'on cherche; on ôtera ce reſte 11 de 36, quarré du même nombre donné 6: ce ſecond reſte 25, qui ſera toujours un nombre quarré, ſera le nombre des haſards contraires à celui qui tient le dé.

Pour entreprendre d'amener 6 en trois coups avec un dé, on conſidérera pareillement que c'eſt la même choſe que d'entreprendre en jettant trois dés à la fois, d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le dé a 91 haſards favorables, & 125 contraires, & ainſi il ne doit mettre que 91 contre 125, où vous voyez qu'il y a encore déſavantage à entreprendre au pair d'amener 6 en trois coups avec un dé.

Vous remarquerez que la ſomme 216 de tous les haſards 91, 125, eſt le cube du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en trois coups avec un dé, & que le nombre 125 des haſards contraires à celui qui tient le dé, eſt le cube du même nombre donné 6 moins 1, c'eſt-à-dire, de 5. C'eſt pourquoi pour trouver le nombre des haſards qui peuvent faire gagner celui qui tient le dé, il n'y a qu'à ôter du cube 216 du

nombre donné 6, le cube 125 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5.

C'eſt de la même façon qu'on trouvera l'avantage que peut avoir celui qui entreprendroit en quatre coups d'amener 6 avec un dé. Car ſi l'on ôte de la quatrieme puiſſance, ou du quarré-quarré 1296, du nombre donné 6, le quarré-quarré 625 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5, le reſte donnera 671 haſards favorables à celui qui tient le dé : & le plus petit quarré-quarré précédent 625, ſera le nombre des haſards contraires à celui qui tient le dé. Où vous voyez que celui qui entreprend en quatre coups d'amener 6 avec un dé, peut mettre 671 contre 625, & qu'ainſi il y a avantage à l'entreprendre au pair.

L'avantage ſera plus grand à entreprendre d'amener 6 en cinq coups avec un dé, comme on le connoîtra en ôtant de la cinquieme puiſſance, ou ſurſolide 7776 du nombre donné 6, le ſurſolide 3125 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5. Car le reſte 4651 ſera le nombre des haſards favorables à celui qui tient le dé, & le plus petit ſurſolide précédent 3125, ſera le nombre des haſards contraires à celui qui tient le dé. Où l'on voit que celui qui entreprend en cinq coups d'amener 6 avec un dé, peut mettre 4651 contre 3125, & qu'ainſi il y a de l'avantage à l'entreprendre au pair.

Si vous voulez ſçavoir le parti de celui qui voudroit entreprendre d'amener en un coup avec deux ou pluſieurs dés, une raſle déterminée, par exemple, terne, vous conſidérerez que s'il l'entreprenoit avec deux dés, il n'auroit qu'un haſard pour gagner, & 35 pour perdre : parce que deux dés peuvent ſe combiner en 36 façons différentes, c'eſt-

à-dire, que leurs faces qui ſont au nombre de 6, peuvent avoir 36 aſſiettes différentes, comme vous le voyez dans cette table, ce nombre 36 étant le

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

quarré du nombre 6 des faces des deux dés. S'il y avoit trois dés, au lieu de 36, quarré de 6, on auroit le cube 216, pour le nombre des combinaiſons entre trois dés; & s'il y avoit quatre dés, on auroit le quarré-quarré 1296, de même nombre 6, pour le nombre des combinaiſons entre quatre dés, & ainſi de ſuite.

D'où il ſuit qu'on ne doit mettre que 1 contre 35, pour faire une raſle déterminée avec deux dés en un coup. On connoîtra par un ſemblable raiſonnement, qu'on ne doit mettre que 3 contre 213, pour faire une raſle déterminée avec trois dés en un coup, & 6 contre 1290, ou 1 contre 215, avec quatre dés, & ainſi de ſuite: parce que des 216 haſards qui ſe trouvent entre trois dés, il y en a 3 pour celui qui tient le dé, puiſque trois choſes ſe peuvent combiner deux à deux en trois façons, & par conſéquent 213 contraires à celui qui tient le dé, & que des 1296 haſards qui ſe trouvent entre quatre dés, il y en a ſix qui ſont favorables à celui qui tient le dé, puiſque quatre choſes ſe combinent deux à deux en ſix façons, & par conſéquent 1290 contraires à celui qui tient le dé.

Mais ſi vous voulez ſçavoir le parti de celui qui entreprendroit de faire une raſle quelconque du premier coup avec deux ou pluſieurs dés, il ne ſera pas difficile de connoître qu'il doit mettre 6 contre 30, ou 1 contre 5, avec deux dés; parce que ſi de 36 haſards qui ſe trouvent entre deux dés, on ôte 6 haſards, qui peuvent produire une raſle, il reſte 30. On connoîtra auſſi aiſément qu'avec trois dés il peut mettre 18 contre 198, ou 1 contre 11 : parce que ſi de 216 haſard qui ſe rencontrent entre trois dés, on ôte 18 haſards qui peuvent produire une raſle, il reſte 198, &c.

PROBLEME XIV.

Pluſieurs dés étant jettés, trouver le nombre des points qui en proviennent après quelques opérations.

SI quelqu'un a jetté ſur une table, par exemple, trois dés, que nous appellerons A, B, C, dites-lui d'ajouter tous les points de deſſus, & ceux de deſſous de deux dés ſeulement, tels qu'on voudra, comme des deux derniers B, C, puis de mettre à part le troiſieme A, ſans en changer l'aſſiette. Dites-lui enſuite de jetter de nouveau les deux mêmes dés B, C, d'ajouter à la ſomme précédente tous les points de deſſus, & ceux de deſſous de l'un de ces dés, comme du ſecond C, pour avoir une ſeconde ſomme, & de mettre à part le premier B, proche du précédent A, ſans en changer l'aſſiette. Enfin faites-lui jetter le dernier dé C, & dites lui d'ajouter à la ſeconde ſomme précédente le nombre des points de deſſus, pour avoir une troiſieme ſomme, que vous trouverez en cette ſorte. Le troiſieme dé C, ayant été mis près des deux autres

ſans en changer la ſituation, approchez-vous de la table, comptez tous les points qui ſe trouveront au-deſſus de ces trois dés, ajoutez à leur ſomme autant de fois 7 qu'il y a de dés, comme ici trois fois 7, ou 21, (ce nombre 7 étant le nombre des points de deux faces oppoſées d'un dé, quand il eſt bien fait;) la ſomme ſera celle qu'on cherche.

Suppoſons qu'ayant jetté pour la premiere fois les trois dés A, B, C, il ſoit venu en deſſus ces trois points 1, 4, 5 : ayant mis, par exemple, le premier 1 à part, faites ajouter à ces trois points, 1, 4, 5, les deux 3, 2, qui ſe trouvent au-deſſous des deux autres, dont les points de deſſus ſont 4, 5, pour avoir la premiere ſomme 15. Suppoſons maintenant que les deux mêmes dés étant jettés il vienne en deſſus ces deux points 3, 6 : celui qui a trois ayant été mis à part près de celui qui avoit 1, faites ajouter ces deux points 3, 6, & encore 1, qui ſe trouve au deſſous du troiſieme dé reſtant, qui a 6 au deſſus; la ſomme 10 étant ajoutée à 15 premiere ſomme trouvée, on aura cette ſeconde ſomme 25. Suppoſons enfin que ce troiſieme dé étant jetté ſeul une troiſieme fois, il vienne 6 en deſſus, vous ferez mettre ce dé avec les autres, ſans le changer, & ajouter le 6 à la ſeconde ſomme 25, pour avoir cette troiſieme ſomme 31 : vous devinerez cette derniere ſomme en ajoutant 21, à la ſomme 10 des points 1, 3, 6, qui ſe trouvent au-deſſus des 3 dés reſtans dont vous vous ſerez approché pour connoître cette ſomme 10 de leurs points 1, 3, 6.

REMARQUE.

Ce problême peut ſe réſoudre avec plus de trois

dés, il ne faut qu'obſerver combien de fois on fait ajouter les points de deux faces oppoſées d'un dé, & retenir autant de fois 7, pour les ajouter, après que le dernier dé aura été jetté, à la ſomme des faces du deſſus de tous les dés qu'on aura fait mettre à part. Si l'on avoit jetté quatre dés, par exemple, on trouveroit qu'en faiſant la même choſe qu'on vient de faire, on fait prendre ſix fois les points des deux faces oppoſées d'un dé, & qu'ainſi il faudroit ajouter 6 fois 7, ou 42 à la ſomme des points des faces de deſſus des dés, dont on ſe ſeroit approché. De même on trouveroit que pour cinq dés, on auroit fait prendre dix fois les points des deux faces oppoſées d'un dé, & que par conſéquent il faudroit ajouter 10 fois 7 ou 70 à la ſomme des faces de deſſus des cinq dés dont on ſe ſeroit approché. Ce ſera la même regle pour tel nombre de dés qu'on aura choiſi.

Il faut prendre garde que les dés ſoient marqués, comme on l'a déja dit, en ſorte que les points des deux faces oppoſées étant ajoutés, faſſent 7. La démonſtration de ce problême n'eſt fondée que ſur cette ſtructure; car toutes les fois qu'on fait prendre les points des deux faces oppoſées, on eſt aſſuré que leur ſomme eſt 7. Donc puiſqu'avec trois dés on fait prendre trois fois les points de deux faces oppoſées, c'eſt la même choſe que de faire prendre 21. Par conſéquent ajoutant 21 à tous les autres points qu'on aſſemble, il eſt évident qu'on a la ſomme de tous les points. Il en eſt de même pour tel autre nombre de dés qu'on aura fait jetter.

PROBLEME XV.

Deux dés étant jettés, trouver les points de deſſus de chaque dé, ſans les voir.

QUelqu'un ayant jetté deux dés ſur une table, faites-lui ajouter 5 au double des points de deſſus de l'un de ces deux dés, puis lui ayant fait multiplier la ſomme par le même nombre 5, dites-lui d'ajouter au produit le nombre des points de deſſus du ſecond dé. Enfin ayant demandé cette ſeconde ſomme, ôtez-en 25, quarré du même nombre 5 : le reſte ſera un nombre compoſé de deux figures, dont la premiere vers la droite, qui repréſente les dixaines, ſera le nombre des points de deſſus du premier dé, & la ſeconde vers la gauche qui repréſente les unités, ſera le nombre des points de deſſus du ſecond dé.

Suppoſons que le nombre des points de deſſus du premier dé ſoit 2, & que le nombre des points de deſſus du ſecond dé ſoit 3. Si on double 2, nombre des points de deſſus du premier dé, & qu'au double 4 on ajoute 5, on aura 9, qui étant multiplié par le même nombre 5, donnera 45, auquel ajoutant 3, nombre des points de deſſus du ſecond dé, on aura 48, d'où ôtant 25, quarré du même nombre 5, il reſte 23, dont la premiere figure 2 montre le nombre des points de deſſus du premier dé, & l'autre figure 3 fait connoître le nombre des points de deſſus du ſecond dé.

Autrement.

Ou bien demandez à celui qui a jetté les deux dés, combien font enſemble les points de deſſous,

& de combien le nombre des points de deſſous de l'un des dés ſurpaſſe le nombre des points de deſſous de l'autre dé ; ſi cet excès eſt, par exemple, 1, & que la ſomme de tous les points de deſſous ſoit 9, ajoutez ces deux nombres, 1, 9, & ôtez 10, leur ſomme, de 14 : la moitié 2, du reſte 4, ſera le nombre des points de deſſus de l'un des deux dés. Pour avoir le nombre des points de deſſus de l'autre dé, au lieu d'ajouter l'excès 1 à la ſomme 9, il le faut ôter, & ayant ôté de 14 le reſte 8, on aura ce ſecond reſte 6 dont la moitié 3 ſera le nombre qu'on cherche.

Encore autrement.

Ou bien encore, dites à celui qui a jetté les deux dés, d'ajouter les points de deſſus, & de vous dire leur ſomme, qui ſera, par exemple, 5. Dites-lui encore de multiplier le nombre des points de deſſus d'un dé, par le nombre des points de deſſous de l'autre dé, & de vous dire leur produit, que nous ſuppoſerons 6. Par le moyen de ce produit & de la ſomme précédente 5, vous trouverez le nombre des points de deſſus de chaque dé en cette ſorte. Multipliez la ſomme 5 par elle-même, pour avoir ſon quarré 25, duquel vous ôterez 24 quadruple du produit 6, & il reſte 1, dont vous prendrez la racine quarrée, qui eſt auſſi 1, laquelle étant ajoutée & ôtée de la ſomme précédente 5, donnera ces deux nombres, 6, 4, dont les moitiés, 3, 2, ſeront les nombres des points de deſſus de chaque dé.

PROBLEME XVI.

Trois dés étant jettés, trouver les points de deſſus de chaque dé ſans les voir.

QUelqu'un ayant jetté trois dés ſur une table, faites les ranger en ligne droite l'un près de l'autre. Demandez la ſomme des points de deſſous du premier & du ſecond dé, qui ſera, par exemple, 9, celle des points de deſſous du ſecond & du troiſieme dé, que nous ſupposerons 5; enfin la ſomme des points de deſſous du premier & du troiſieme dé qui ſoit 6. Par le moyen de ces trois ſommes ou nombres connus, 9, 5, 6, on trouvera le nombre des points de deſſus du premier dé: car en ôtant de 15, ſomme du premier & du troiſieme nombre, le ſecond 5, & en ôtant de 14 le reſte 10, on aura cet autre reſte 4, dont la moitié 2 ſera le nombre des points de deſſus du premier dé. Pour trouver le nombre des points de deſſus du ſecond dé, ôtez de 14, ſomme des deux premiers nombres, 9, 5, le troiſieme; puis ôtez de 14 le reſte 8, pour avoir un ſecond reſte 6, dont la moitié 3 ſera le nombre des points de deſſus du ſecond dé. Enfin pour avoir le nombre des points de deſſus du troiſime dé, ôtez de 11, ſomme du ſecond nombre 5, & du troiſieme 6, le premier 9; enſuite ôtez de 14 le reſte 2, pour avoir un ſecond reſte 12, dont la moitié 6 ſera le nombre des points de deſſus du troiſieme dé.

Autrement.

Les trois dés ayant été jettés, faites doubler le nombre des points de l'un de ces dés, puis

vous ferez ajouter 5 à ce double, multiplier la ſomme par 5, & ajouter 10 à ce produit. Faites enſuite ajouter à ce total, le nombre des points du ſecond dé, & multiplier cette ſomme par 10. Enfin ayant ajouté à ce dernier produit le nombre des points du troiſieme dé, vous demanderez la ſomme qui ſera venue après toutes ces opérations. Vous en ôterez 350, & les trois nombres qui reſteront, marqueront le nombre des points de chaque dé; en ſorte que celui qui ſera à la place des centaines, ſera le nombre des points du premier dé; celui qui ſera à la place des dixaines, ſera le nombre des points du ſecond dé, & celui qui ſera à la place des unités, ſera le nombre des points du troiſieme dé.

Si, par exemple, on amene ces trois nombres 2, 3, 6, le double de 2 eſt 4, auquel ajoutant 5, il vient 9, qui étant multiplié par 5, donne 45, auquel on ajoutera 10, & l'on aura 55. Enſuite ayant ajouté 3, nombre des points du ſecond dé, à cette ſomme 55, on aura 58, qui étant multiplié par 10, donnera 580. Enfin on ajoutera 6, nombre des points du troiſieme dé, à 580 la ſomme ſera 586. Toutes ces opérations auront été faites en ſecret. Mais lorſque vous ſçaurez que le total eſt 586, vous en ôterez 350, il reſtera 236. Chacun de ces chiffres pris de ſuite, marque le nombres des points de chaque dé, 2, 3, 6.

REMARQUE.

On vient de voir que quand on a jetté trois dés, il falloit ôter 350 de la ſomme demandée & connue; mais ſi l'on avoit jetté quatre dés, il faudroit continuer à faire la même choſe pour le qua-

trieme dé, que ce qu'on a fait pour les trois autres, & ôter de la ſomme demandée 3500. Il en eſt de même pour un plus grand nombre de dés, il faudra ôter de la ſomme demandée le nombre 350, augmenté d'autant de zeros qu'il y aura de dés qui ſurpaſſeront les trois qu'on a d'abord jetté. Par exemple, s'il y avoit quatre dés, dont les points fuſſent 3, 5, 8, 2, ayant fait doubler le 3, point du premier dé, il viendra 6, auquel faiſant ajouter 5, la ſomme ſera 11, qui multipliée par 5, donne 55 : & faiſant ajouter 10 à ce produit, on aura 65. Enſuite on fera ajouter à 65 le 5, point du ſecond dé, & l'on aura 70, qui multiplié par 10, donnera 700, auquel on fera ajouter le 8, point du troiſieme dé, & la ſomme ſera 708 : cette ſomme ayant été multipliée par 10, il viendra 7080. On fera ajouter le 2, point du quatrieme dé à ce produit, on aura 7082. Enfin après avoir connu cette ſomme 7082, on en ôtera 3500, & le reſte 3582 exprimera par ordre les points de chaque dé, 3, 5, 8, 2.

On voit que les points 8, 2, des deux derniers dés, n'ont point été changés par les opérations ; c'eſt pourquoi afin de mieux couvrir l'artifice, il ſeroit à propos de faire ajouter à la ſomme totale 7082 quelque nombre, comme 12, l'on auroit 7094 : puis ayant demandé cette derniere ſomme, on en ôteroit 3512, & il reſteroit le même nombre qu'auparavant 3582.

La méthode qu'on vient de propoſer pour deviner les points de pluſieurs dés jettés, peut très-bien ſervir à deviner pluſieurs nombres penſés. Ainſi on peut l'ajouter à toutes les diverſes manieres qu'on va enſeigner dans les problêmes ſuivans.

PROBLEME XVII.

Deviner le nombre que quelqu'un a penſé.

I.

FAites multiplier par lui-même le nombre penſé ; dites enſuite d'ajouter à ce quarré le double du nombre penſé ; puis faites ajouter l'unité à la ſomme du quarré & du double : enfin ayant demandé quelle eſt cette ſomme, vous en tirerez la racine quarrée, d'où ayant ôté l'unité, il reſtera le nombre penſé.

Comme ſi quelqu'un a penſé 6, le quarré de ce nombre eſt 36, auquel ſi on ajoute 12 double de 6, on aura 48 : ce nombre augmenté de l'unité, donnera 49. On tirera la racine quarrée de 49, qui eſt 7, ôtant 1 de 7, on aura 6 pour le nombre penſé.

II.

Ayant fait ôter 1 du nombre penſé, faites doubler le reſte : ayant encore fait ôter 1 de ce double, faites ajouter au reſte le nombre penſé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition, ajoutez-y 3 ; la troiſieme partie de cette ſomme ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on en ôte 1, il reſtera 4, dont le double 8 étant diminué de 1, & le reſte 7 étant augmenté du nombre penſé 5, on a cette ſomme 12, à laquelle ajoutant 3, on a cette autre ſomme 15, dont la troiſieme partie 5 eſt le nombre penſé.

III.

Ou bien après avoir fait ôter 1 du nombre penſé,

faites tripler le reſte, & après avoir auſſi fait ôter 1 de ce triple, faites ajouter au reſte le nombre penſé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition, vous y ajouterez 4 ; la quatrieme partie de cette ſomme ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on en ôte 1, il reſtera 4, dont le triple 12 étant diminué de 1, & le reſte 11 étant augmenté du nombre penſé 5, on a cette ſomme 16, à laquelle ajoutant 4, on a cette autre ſomme 20, dont la quatrieme partie 5 eſt le nombre penſé.

IV.

Ayant fait ajouter 1 au nombre penſé, faites doubler la ſomme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double, faites ajouter à la ſomme le nombre penſé : enfin demandez le nombre qui vient de cette derniere addition, dont vous ôterez 3, la troiſieme partie du reſte ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le double 12 étant augmenté de 1, & la ſomme 13 étant augmentée du nombre penſé 5, on a cette ſomme 18, de laquelle ôtant 3, il reſtera 15, dont la troiſieme partie 5 eſt le nombre penſé.

V.

Ou bien après avoir fait ajouter 1 au nombre penſé, faites tripler la ſomme ; après avoir auſſi fait ajouter 1 à ce triple, faites ajouter à la ſomme le nombre penſé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette derniere addition, vous en ôterez 4 ; la quatrieme partie du reſte ſera le nombre penſé.

Comme

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le triple 18 étant augmenté de 1, & la ſomme 19 étant augmentée du nombre penſé 5, on a cette ſomme 24, de laquelle ôtant 4, il reſtera 20, dont la quatrieme partie 5 eſt le nombre penſé.

VI.

Ayant fait ôter 1 du nombre penſé, faites doubler le reſte : ayant encore fait ôter 1 de ce double, faites ôter du reſte le nombre penſé : enfin ayant demandé le nombre qui reſte de cette derniere ſouſtraction, vous y ajouterez 3, la ſomme ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on en ôte 1, il reſtera 4; dont le double 8 étant diminué de 1, & le reſte 7 étant encore diminué du nombre penſé 5, il reſte 2 : auquel ajoutant 3, la ſomme 5 eſt le nombre penſé.

VII.

Ayant fait ajouter 1 au nombre penſé, faites doubler la ſomme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double, faites ôter de la ſomme le nombre penſé : enfin ayant demandé le nombre qui reſte de cette ſouſtraction, vous en ôterez 3, le reſte ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le double 12 étant augmenté de 1, & la ſomme 13 étant diminuée du nombre penſé 5, il reſtera 8, dont ôtant 3, le reſte 5 eſt le nombre penſé.

VIII.

Après avoir fait ôter 1 du nombre penſé, faites tripler le reſte, & après avoir auſſi fait ôter 1 de

ce triple, faites ôter du reſte le double du nombre penſé : enfin ayant demandé le nombre qui reſte de cette derniere ſouſtraction, vous ajouterez 4; la ſomme ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on en ôte 1, il reſtera 4, dont le triple 12 étant diminué de 1, & le reſte 11 étant encore diminué de 10, double du nombre penſé, il reſte 1, auquel ajoutant 4, la ſomme 5 eſt le nombre penſé.

IX.

Après avoir fait ajouter 1 au nombre penſé, faites tripler la ſomme, & après avoir auſſi fait ajouter 1 à ce triple, faites ôter de la ſomme le double du nombre penſé : enfin ayant demandé le nombre qui reſte, vous en ôterez 4, le reſte ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le triple 18 étant augmenté de 1, & la ſomme 19 étant diminuée de 10, double du nombre penſé 5, on a ce reſte 9, dont ôtant 4, le reſte 5 eſt le nombre penſé.

X.

Dites à celui qui aura penſé un nombre, de multiplier ce nombre par 3, & de prendre la moitié de ce triple, au cas qu'il le puiſſe faire ſans reſte, s'il ne peut le faire ſans reſte, vous lui ferez ajouter 1 à ce triple, pour en pouvoir prendre juſtement la moitié, que vous ferez encore multiplier par 3. Après quoi vous demanderez combien il y a de fois 9 dans ce dernier triple, & vous prendrez autant de fois 2 qu'il y aura de fois 9, pour le nombre qui aura été penſé. Mais vous vous ſouviendrez d'ajouter 1, ſi vous l'avez fait ajou-

ter auparavant, lorſque la diviſion par 2 n'aura pu ſe faire ſans reſte.

Comme ſi l'on a penſé 5, ſon triple eſt 15, dont on ne peut prendre exactement la moitié; c'eſt pourquoi on y ajoutera 1, & l'on aura 16, dont la moitié 8 étant multipliée encore par 3, on a ce produit 24, dans lequel 9 eſt compris 2 fois: donc prenant 2 fois 2, on a ce nombre 4, auquel ajoutant 1, qu'on a fait ajouter auparavant, la ſomme 5 eſt le nombre penſé.

Remarquez que le nombre penſé ſera 1, lorſque le nombre 9 ne ſera point contenu dans le dernier triple.

Pour ôter les 9 autant de fois qu'il ſe pourra, faites ôter 27, ou 36, ou 72, &c. ſi ces nombres y ſont contenus, puis faites ôter 9 du reſte, ſi cela ſe peut, & ainſi autant de fois qu'il ſera poſſible. C'eſt une maniere différente de celle qu'on vient d'enſeigner.

XI.

Faites ajouter & ôter 1 du nombre penſé, pour avoir une ſomme & un reſte que vous ferez multiplier enſemble, & demandez le produit qui vient de la multiplication: ſi vous ajoutez 1 à ce produit, la racine quarrée de la ſomme ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, ajoutant 1 à 5, on a la ſomme 6, & ôtant 1 de 5, on a le reſte 4; puis multipliant la ſomme 6 par le reſte 4, on a un produit 24, auquel ajoutant 1, la racine quarrée 5 de la ſomme 25 eſt le nombre penſé.

XII.

Ayant fait ajouter 1 au nombre penſé, faites

multiplier la ſomme par le nombre penſé, & faites ôter du produit le même nombre penſé : enfin demandez le nombre qui reſtera de cette ſouſtraction, la racine quarrée de ce reſte ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, ajoutant 1 à 5, on a 6, qui étant multiplié par le nombre penſé 5, donne 30, d'où ôtant le même nombre penſé 5, il reſte 25, dont la racine quarrée 5 eſt le nombre penſé.

XIII.

Ou bien ayant fait ôter 1 du nombre penſé, faites multiplier le reſte par le nombre penſé ; puis faites ajouter au produit le même nombre penſé : enfin demandez la ſomme qui vient de cette addition ; la racine quarrée de cette ſomme ſera le nombre penſé.

Comme l'on a penſé 5, ôtant 1 de 5, il reſte 4, qui étant multiplié par le nombre penſé 5, donne 20, auquel ajoutant le même nombre penſé 5, on a 25, dont la racine quarrée 5 eſt le nombre penſé.

XIV.

Ayant fait ajouter 2 au nombre penſé, faites ajouter à la ſomme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 12 ; vous ferez encore ajouter à la ſomme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 320 : enfin vous demanderez le reſte, dont les figures ſignificatives vers la gauche, en retranchant les deux zero, qui ſe rencontrent toujours à la droite, repréſenteront le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, en y ajoutant 2, on a 7, auquel ajoutant un 0 vers la droite, on a 70,

auquel ſi l'on ajoute 12, on a 82; puis ajoutant encore un o vers la droite, on a 820, d'où ôtant 320, il reſte 500, dont retranchant les deux zeros à la droite, le reſte 5 eſt le nombre penſé.

XV.

Ayant fait ajouter 5 au double du nombre penſé, faites ajouter à la ſomme un o vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 20: puis vous ferez encore ajouter à la ſomme un o vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 700; enfin vous demanderez le reſte, dont vous retrancherez les deux zeros, qui ſe rencontreront toujours à la droite, & la moitié du nombre qui reſtera vers la gauche, ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, en ajoutant 5 à ſon double 10, on a 15, auquel ajoutant un o vers la droite, on a 150, auquel ſi l'on ajoute 20, on a 170; puis ajoutant à ce nombre un o vers la droite, on a 1700, d'où ôtant 700, on a 1000, dont retranchant deux zeros à la droite, la moitié 5 du reſte 10, eſt le nombre penſé.

XVI.

Ces deux dernieres méthodes ne ſont pas extrêmement ſubtiles, parce que le dernier nombre étant connu, il eſt aiſé, en rétrogradant, de connoître les autres nombres, & par conſéquent le nombre penſé. C'eſt pourquoi il vaudra mieux ſe ſervir des deux méthodes ſuivantes, dont le ſecret eſt plus caché.

Ayant fait ajouter 1 au triple du nombre penſé, faite multiplier la ſomme par 3; puis ayant fai-

ajouter à ce triple le nombre penſé, demandez le nombre qui viendra de cette addition ; car ſi vous ôtez 3 de cette ſomme, & que du reſte vous retranchiez le o qui ſe trouvera à la droite, le reſte vers la gauche ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, ajoutant 1 à ſon triple 15, on a 16, dont le triple eſt 48, auquel ajoutant le nombre penſé 5, on a 53, d'où ôtant 3, & retranchant du reſte 50 le o qui eſt à la droite, il reſte 5 vers la gauche pour le nombre penſé.

XVII.

Ayant fait ôter 1 du triple du nombre penſé, faites multiplier le reſte par 3 ; puis ayant fait ajouter au produit le nombre penſé, demandez le nombre qui vient de cette addition ; car ſi vous ajoutez 3 à cette ſomme, & que de cette ſeconde ſomme vous retranchiez le o qui ſe trouvera à la droite, le reſte vers la gauche ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, en ôtant 1 de ſon triple 15, il reſte 14, dont le triple eſt 42, auquel ajoutant le nombre penſé 5, on a 47, auquel ajoutant 3, & retranchant de la ſomme 50 le o qui eſt à la droite, il reſte 5 vers la gauche pour le nombre penſé.

COROLLAIRE.

Il ſuit de ces deux dernieres méthodes, que, *ſi on ajoute l'unité au triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la ſomme, on aura une ſeconde ſomme qui ſe terminera par* 3. Comme ſi on ajoute l'unité au triple 18 du nombre 6, & qu'on ajoute le même nombre 6 au

triple 57 de la ſomme 19, on a cette ſeconde ſomme 63, qui ſe termine par 3.

Il s'enſuit auſſi que *ſi on ôte l'unité du triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple du reſte, on aura une ſomme qui ſe terminera par* 7. Comme ſi on ôte l'unité du triple 18 du nombre 6, & qu'on ajoute le même nombre 6, au triple 51 du reſte 17, on a cette ſomme 57, qui ſe termine par 7.

Enfin il s'enſuit que ce problême double eſt impoſſible ; *trouver un nombre tel, que ſi on ajoute l'unité à ſon triple, ou qu'on ôte l'unité de ſon triple, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la ſomme, ou du reſte, la ſomme ſoit un quarré parfait*, parce que tout nombre qui finit par 3, ou par 7, ne peut avoir une racine quarrée exacte, comme on a dit au problême VIII, p. 19. Voyez le problême ſuivant.

PROBLEME XVIII.

Trouver le nombre qui reſte à quelqu'un après quelques opérations, ſans lui rien demander.

AYant fait penſer un nombre à volonté, faites ajouter à ſon double un nombre pair, tel qu'il vous plaira, par exemple, 8 ; puis faites ôter de la moitié de la ſomme le nombre penſé : ce qui reſtera ſera la moitié du nombre pair que vous aviez fait ajouter auparavant ; ſçavoir, 4. Ainſi vous direz hardiment qu'il reſte 4 ; ce qui ſurprendra agréablement ceux qui n'en verront pas d'abord la raiſon, quoique la démonſtration en ſoit facile.

C'eſt pourquoi pour ſçavoir adroitement le nombre qui aura été pénſé, faites ſemblant d'ignorer le reſte 4, & faites-le ôter du nombre penſé, ſi le

nombre penſé eſt plus grand ; ou faites-en ôter le nombre penſé, ſi le nombre penſé eſt plus petit ; puis demandez le reſte. Si vous ajoutez ce reſte à la moitié 4 du nombre 8, que vous aviez fait ajouter au nombre penſé, ſi le nombre penſé a été trouvé plus grand que cette moitié 4, ou ſi vous ôtez ce reſte de la même moitié 4, ſi le nombre penſé a été trouvé plus petit que cette moitié 4, vous aurez le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on ajoute 8 à ſon double 10, on aura 18, dont la moitié eſt 9, d'où ôtant le nombre penſé 5, il reſte 4, moitié de 8, nombre ajouté, & ſi l'on ôte cette moitié 4, du nombre penſé 5 qui eſt plus grand, il reſtera 1 ; ce reſte étant ajouté à la même moitié 4, parce que le nombre penſé 5 s'eſt trouvé plus grand que cette moitié 4 ; on aura la ſomme 5, qui eſt le nombre penſé.

De même, ſi on ajoute 12 au double 10 du nombre penſé 5, on aura 22, dont la moitié eſt 11, d'où ôtant le nombre penſé 5, il reſte 6, moitié du nombre ajouté 12 ; & ſi de cette moitié 6 on ôte le nombre penſé 5, qui eſt le plus petit, il reſtera 1 ; ce reſte étant ôté de la même moitié 6, parce que le nombre penſé 5, s'eſt trouvé moindre que cette moitié 6, on aura un autre reſte 5, qui eſt le nombre penſé.

Autrement.

Faites ôter du double du nombre penſé un nombre pair moindre & tel qu'il vous plaira, par exemple, 4 : faites encore ôter la moitié du reſte du nombre penſé, le reſte ſera 2, moitié du nombre ôté 4 : c'eſt pourquoi pour trouver le nombre penſé, faites ajouter à cette moitié 2 le nom-

bre penſé, & demandez la ſomme qui ſoit, par exemple, 7, dont ſi vous ôtez la même moitié 2, le reſte 5 ſera le nombre penſé.

Autrement.

On peut encore trouver plus facilement le nombre que quelqu'un aura penſé, en lui faiſant ajouter un nombre à volonté, & en faiſant multiplier la ſomme par le nombre penſé. Enſuite ayant fait ôter du produit le quarré du nombre penſé, demandez le reſte, & diviſez ce reſte par le nombre que vous avez fait ajouter, le quotient ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on y ajoute, par exemple, 4, on aura 9, qui étant multiplié par le nombre penſé 5, on a 45, d'où ôtant le quarré 25 du nombre penſé 5, & le reſte 20 étant diviſé par le nombre 4, qui a été ajouté auparavant, le quotient donne 5 pour le nombre penſé.

Autrement.

Ou bien faites ôter du nombre penſé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira : faites multiplier le reſte par le nombre penſé, faites ôter ce produit du quarré du nombre penſé, demandez le reſte, & diviſez ce reſte par le nombre que vous avez fait ôter du nombre penſé, le quotient ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5 & qu'on en ôte, par exemple, 3, il reſtera 2, qui étant multiplié par le nombre penſé 5, produit 10. Ce nombre 10 étant ôté de 25, quarré du nombre penſé 5, il reſte 15, qui étant diviſé par le nombre 3, qui a été ôté du nombre penſé, donne pour quotient 5, qui eſt le nombre penſé.

Autrement.

La maniere la plus facile de toutes pour deviner le nombre que quelqu'un aura penſé, eſt la ſuivante. Faites ôter du nombre penſé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira, & mettre le reſte à part. Faites ajouter le même nombre au nombre penſé, & ajouter à la ſomme le reſte précédent, pour avoir une ſeconde ſomme, que vous demanderez; la moitié de cette ſomme ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, & qu'on en ôte, par exemple, 3, il reſtera 2; ſi l'on ajoute le même nombre 3 au nombre penſé 5, on aura 8, auquel ajoutant le precédent reſte 2, on a 10, dont la moitié 5 eſt le nombre penſé.

PROBLEME XIX.

Trouver le nombre que quelqu'un aura penſé, ſans lui rien demander.

FAites ajouter au nombre penſé ſa moitié, s'il eſt pair, ou ſa plus grande moitié, s'il eſt impair, pour avoir une premiere ſomme. Faites auſſi ajouter à cette ſomme ſa moitié, ou ſa plus grande moitié, ſelon qu'elle ſera un nombre pair ou impair, pour avoir une ſeconde ſomme, dont vous ferez ôter le double du nombre penſé; enſuite faites prendre la moitié du reſte, ou ſa plus petite moitié, au cas que ce reſte ſoit un nombre impair, continuez à faire prendre la moitié de la moitié, juſqu'à ce qu'on vienne à l'unité. Cela étant fait, remarquez combien de ſoudiviſions on aura faites, & pour la premiere diviſion retenez 2, pour la ſeconde 4, pour la troiſieme 8, & ainſi des autres

en proportion double. Obſervez qu'il faut ajouter 1 pour chaque fois que vous aurez pris la plus petite moitié, parce qu'en prenant cette plus petite moitié, il reſte toujours 1, & qu'il faut ſeulement retenir 1, lorſqu'on n'aura pu faire aucune ſouſdiviſion; car ainſi vous aurez le nombre dont on a pris les moitiés des moitiés, alors le quadruple de ce nombre ſera le nombre penſé, au cas qu'il n'ait point fallu prendre au commencement la plus grande moitié, ce qui arrivera ſeulement lorſque le nombre penſé ſera pairement pair, ou diviſible par 4; autrement on ôtera 3 de ce quadruple ſi à la premiere diviſion l'on a pris la plus grande moitié, ou bien ſeulement 2, ſi à la ſeconde diviſion l'on a pris la plus grande moitié, ou bien enfin 5, ſi à chacune des deux diviſions on a pris la plus grande moitié, & alors le reſte ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 4, en lui ajoutant ſa moitié 2, on a 6, auquel ſi l'on ajoute pareillement ſa moitié 3, on a 9, d'ou ôtant le double 8 du nombre penſé 4, il reſte 1, dont on ne ſçauroit prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité; c'eſt pourquoi on retiendra 1, dont le quadruple 4 eſt le nombre penſé.

Si l'on a penſé 5, en lui ajoutant ſa plus grande moitié 3, on a 8, auquel ſi on ajoute ſa moitié 4, on a 12, d'où ôtant le double 10 du nombre penſé 5, il reſte 2, dont la moitié eſt 1: & comme l'on ne ſçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité, on retiendra 2, parce qu'il y a une ſouſdiviſion. Si de 8, quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 3, parce que dans la premiere diviſion on a pris la plus grande moitié, le reſte 5 eſt le nombre penſé.

Si le nombre penſé eſt 6, en lui ajoutant ſa moitié 3, on a 9, auquel ſi l'on ajoute ſa plus grande moitié 5, on a 14, d'où ôtant le double 12 du nombre penſé 6, il reſte 2, dont la moitié eſt 1 : comme l'on ne ſçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité, on retiendra 2, parce qu'il y a une ſouſdiviſion. Si de 8, quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 2, parce que dans la ſeconde diviſion, l'on a pris la plus grande moitié, le reſte 6 eſt le nombre penſé.

Si l'on a penſé 7, en lui ajoutant ſa plus grande moitié 4, on a 11, auquel ſi l'on ajoute pareillement ſa plus grande moitié 6, on a 17 ; d'où ôtant le double 14 du nombre penſé 7, il reſte 3, dont la plus petite moitié eſt 1, & comme l'on ne ſçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité, on retiendra 2, auquel on ajoutera 1, parce qu'on a pris la plus petite moitié ; ainſi on aura 3, dont le quadruple eſt 12, duquel ôtant 5, parce que dans la premiere & dans la ſeconde diviſion l'on a pris la plus grande moitié, le reſte 7 eſt le nombre penſé. Ainſi des autres.

PROBLEME XX.

Deviner deux nombres que quelqu'un aura penſé.

I.

AYant fait ajouter enſemble les deux nombres penſés, pour avoir leur ſomme, & ayant fait ôter le plus petit du plus grand, pour avoir leur différence, faites multiplier la ſomme par la différence, & ajouter au produit le quarré du plus petit nombre penſé. Alors demandez le nombre qui vient de cette addition, & prenez-en la racine

quarrée qui ſera le plus grand des deux nombres penſés. Pour avoir le plus petit, au lieu de faire ajouter au produit le quarré du plus petit nombre penſé, faites ôter ce produit du quarré du plus grand nombre penſé, & demandez le nombre qui reſtera : la racine quarrée de ce reſte ſera le plus petit nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 3 & 5, en multipliant leur ſomme 8 par leur différence 2, on a le produit 16, auquel ajoutant le quarré 9 du plus petit nombre penſé 3, on a 25, dont la racine quarrée 5 eſt le plus grand des deux nombres penſés : & ôtant le même produit 16 de 25, quarré du plus grand nombre penſé 5, il reſte 9, dont la racine quarrée 3 eſt le plus petit nombre penſé.

II.

Faites ajouter à la ſomme des deux nombres penſés leur différence, & demandez le nombre qui vient de cette addition ; la moitié de ce nombre ſera le plus grand des deux nombres penſés. Pour avoir le plus petit, faites ôter la différence des deux nombres penſés de leur ſomme, & demandez le nombre qui reſtera ; la moitié de ce reſte ſera le plus petit nombre penſé.

Comme dans cet exemple, en ajoutant la différence 2 des deux nombres penſés à leur ſomme 8, on a 10, dont la moitié 5 eſt le plus grand des deux nombres penſés ; & en ôtant la différence 2 de la ſomme 8, il reſte 6, dont la moitié 3 eſt le plus petit nombre penſé.

III.

Faites multiplier la ſomme de deux nombres penſés par elle-même, pour avoir ſon quarré ;

puis ayant fait ajouter au plus petit des deux nombres penſés, le double du plus grand, & ayant fait multiplier la ſomme par le plus petit, faites ôter le produit du précédent quarré, & demandez le reſte ; la racine quarrée de ce reſte ſera le plus grand des deux nombres penſés. Pour avoir le plus petit, ayant fait ajouter au plus grand le double du plus petit, & ayant fait multiplier la ſomme par le plus grand, faites ôter le produit du précédent quarré, & demandez le reſte dont la racine quarrée ſera le plus petit nombre penſé.

Comme dans cet exemple, où l'on a ſuppoſé que les deux nombres penſés ſont 3 & 5, leur ſomme eſt 8, qui étant multiplié par ſoi-même, donne 64 pour ſon quarré. En ajoutant au plus petit nombre penſé 3 le double 10 du plus grand 5, on a 13, qui étant multiplié par le plus petit 3, donne 39 ; ce produit 39 étant ôté du précédent quarré 54, il reſte 25, dont la racine quarrée 5 eſt le plus grand des deux nombres penſés. En ajoutant au plus grand nombre penſé 5 le double 6 du plus petit 3, on a 11, qui étant multiplié par le plus grand 5 produit 55 ; ce produit 55 étant ôté du précédent quarré 64, il reſte 9, dont la racine quarrée 3 eſt le plus petit nombre penſé.

IV.

Faites multiplier enſemble les deux nombres penſés, pour avoir leur produit. Faites auſſi multiplier la ſomme des deux mêmes nombres par celui que vous voulez trouver, & faites ôter de ce produit le produit des deux nombres : après quoi vous demanderez le reſte, dont la racine quarrée ſera le nombre que vous cherchez.

Comme dans cet exemple, ſi l'on multiplie en-

ſemble les deux nombres penſés 3, 5, on aura leur produit 15, & ſi l'on multiplie leur ſomme 8 par le plus grand nombre 5, ſi vous le voulez trouver, on a ce produit 40, d'où ôtant le précédent produit 15, il reſte 25, dont la racine quarrée 5 eſt le nombre qu'on cherche.

V.

Après avoir fait multiplier enſemble les deux nombres penſés, pour avoir leur produit, faites multiplier leur différence par le nombre que vous cherchez; & faites ajouter à ce produit, le produit des deux nombres, ſi vous demandez le plus grand nombre, ou bien faites ôter ce produit du produit des deux nombres, ſi vous demandez le plus petit : alors ſi vous demandez le nombre qui vient de cette addition, ou de cette ſouſtraction, & que vous en preniez la racine quarrée, vous aurez le nombre que vous cherchez.

Comme dans cet exemple, après avoir multiplié enſemble les deux nombre penſés 3, 5, pour avoir leur produit 15, ſi l'on fait multiplier leur différence 2, par le plus grand nombre 5, & qu'on ajoute le produit 10 au premier produit 15, on aura 25, dont la racine quarrée 5 eſt le plus grand nombre. De même, ſi l'on multiplie leur différence 2 par le plus petit nombre 3, & qu'on ôte le produit 6 du premier 15, il reſtera 9, dont la racine quarrée 3 eſt le plus petit nombre penſé.

VI.

Lorſque le plus petit des deux nombres penſés ne paſſera pas 9, on les pourra deviner très-facilement en cette ſorte. Ayant fait ajouter 1 au triple du plus grand des deux nombres penſés, fai-

tes encore ajouter au triple de cette ſomme les deux nombres penſés, & demandez le nombre qui vient de cette addition; ſi vous en ôtez 3, la premiere figure du reſte vers la droite ſera le plus petit nombre penſé, & ce qui reſtera vers la gauche, ſera le plus grand.

Comme dans l'exemple qui vient d'être propoſé, où les deux nombres ſont 3, 5, ajoutant 1 à 15, triple du plus grand 5, on a 16, & ajoutant à 48 triple de cette ſomme 16, les deux nombres penſés 3, 5, ou 8, on a 56, d'où ôtant 3, il reſte 53, dont la premiere figure 5 vers la droite, eſt le plus petit nombre penſé, & l'autre figure 5, qui reſte vers la gauche, eſt le plus grand.

PROBLEME XXI.

Deviner pluſieurs nombres que quelqu'un aura penſé.

I

SI la multitude des nombres penſés eſt impaire, demandez les ſommes du premier & du ſecond, du ſecond & du troiſieme, du troiſieme & du quatrieme, & ainſi de ſuite juſqu'à la ſomme du premier & du dernier. Ayant écrit toutes ces ſommes par ordre, en ſorte que la ſomme du premier & du dernier ſoit la derniere, ôtez toutes les ſommes qui ſeront dans les lieux pairs de toutes celles qui ſeront dans les lieux impairs, & la moitié du reſte ſera le premier nombre penſé, lequel étant ôté de la premiere ſomme, il reſtera le ſecond nombre penſé, lequel étant pareillement ôté de la ſeconde ſomme, le reſte ſera le troiſieme nombre penſé, & ainſi de ſuite.

Comme

Comme ſi l'on a penſé ces cinq nombres, 2, 4, 5, 7, 8, les ſommes du premier & du ſecond, du ſecond & du troiſieme, & ainſi des autres juſqu'à la ſomme du premier & du cinquieme ſont, 6, 9, 12, 15, 10: ôtant 24, ſomme des deux 9, 15, qui ſont dans les lieux pairs de la ſomme 28 des trois 6, 12, 10, qui ſont dans les lieux impairs, il reſte 4, dont la moitié 2 eſt le premier nombre penſé, lequel étant ôté de la premiere ſomme 6, le reſte 4 eſt le ſecond nombre penſé, lequel étant pareillement ôté de la ſeconde ſomme 9, il reſte 5 pour le troiſieme nombre penſé, &c.

II.

Si la multitude des nombres penſés eſt paire, demandez les ſommes du premier & du ſecond, du ſecond & du troiſieme, du troiſieme & du quatrieme, & ainſi de ſuite juſqu'à la ſomme du ſecond & du dernier. Ayant écrit toutes ces ſommes par ordre, en ſorte que la ſomme du ſecond & du dernier ſoit la derniere, ôtez de toutes les ſommes qui ſeront dans les lieux pairs toutes celles qui ſeront dans les lieux impairs, excepté la premiere: la moitié du reſte ſera le ſecond nombre penſé, par le moyen duquel il ſera facile de trouver les autres; car ſi on l'ôte de la premiere ſomme, il reſtera le premier nombre penſé; & ſi on l'ôte de la ſeconde ſomme, le reſte ſera le troiſieme nombre penſé, lequel étant pareillement ôté de la troiſieme ſomme, on aura pour reſte le quatrieme nombre penſé, & ainſi de ſuite.

Comme ſi l'on a penſé ces ſix nombres, 2, 4, 5, 7, 8, 9, les ſommes du premier & du ſecond, du ſecond & du troiſieme, du troiſieme & du quatrieme, ainſi de ſuite juſqu'à la ſomme du ſecond

& du ſixieme, ſeront 6, 9, 12, 15, 17, 13 ôtant 29, ſomme de la troiſieme 12, & de la cinquieme 17, qui ſont dans les lieux impairs, en omettant la premiere, de 37, ſomme des trois 9, 15, 13, qui ſont dans les lieux pairs, il reſte 8, dont la moitié 4 eſt le ſecond nombre penſé, lequel étant ôté de la premiere ſomme 6, le reſte 2 eſt le premier nombre penſé; & étant ôté de la ſeconde ſomme 9, le reſte 5 eſt le troiſieme nombre penſé, lequel étant pareillement ôté de la troiſieme ſomme 12, il reſte 7 pour le quatrieme nombre penſé, & ainſi de ſuite.

III.

Lorſque chacun des nombres penſés ne ſera compoſé que d'une figure, on les pourra trouver très-facilement en cette ſorte. Ayant fait ajouter 1 au double du premier nombre penſé, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le ſecond nombre penſé. S'il y a un troiſieme nombre, ayant fait pareillement ajouter 1 au double de la ſomme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le quatrieme nombre penſé. De même, s'il y a un troiſieme nombre, ayant fait auſſi ajouter 1 au double de la derniere ſomme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le quatrieme nombre penſé, & ainſi de ſuite, s'il y a davantage de nombres penſés. Après cela demandez le nombre qui vient de l'addition du dernier nombre penſé, & ôtez-en 5 pour deux nombres penſés, 55 pour trois nombres penſés 555, pour quatre nombres penſés, & ainſi de ſuite : alors la premiere figure du reſte, vers la gauche, ſera le premier nombre penſé; la ſuivante en allant vers la droite, ſera le ſecond nom-

bre penſé, & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere figure vers la droite qui repréſentera le dernier nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé ces quatre nombres 3, 4, 6, 9, en ajoutant 1 au double 6 du premier nombre penſé, 3 & en multipliant la ſomme 7 par 5, on a 35, auquel ajoutant le ſecond nombre penſé 4, on a 39, dont le double eſt 78, auquel ajoutant 1, & multipliant la ſomme 79 par 5, on a 395, auquel ajoutant le troiſieme nombre penſé 6, on a 401, dont le double eſt 802, auquel ajoutant 1, & multipliant la ſomme 803 par 5, il vient 4015, auquel ajoutant le quatrieme nombre penſé 9, & ôtant la ſomme 4024 ce nombre 555, il reſte 3469, dont les quatre figures ſont les quatre nombres penſés.

IV.

On peut encore réſoudre très-facilement le cas précédent par cette méthode. Ayant fait ôter 2 du double du premier nombre penſé, & ayant fait multiplier le reſte par 5, faites ajouter au produit le ſecond nombre penſé, & demandez la ſomme, s'il n'y a plus de nombres penſés, autrement faites ajouter 5 à cette ſomme, pour avoir une ſeconde ſomme; & ayant fait pareillement ôter 1 du double de cette ſeconde ſomme, faites auſſi multiplier le reſte par 5, & faites ajouter au produit le troiſieme nombre penſé, & demandez la ſomme, s'il n'y a plus de nombres penſés; autrement il faudra, comme auparavant, faire ajouter 5 à cette ſomme, pour avoir une autre ſomme; & ayant fait de la même façon ôter 1 du double de cette autre ſomme, faites encore multiplier le reſte par 5, & faites ajouter au produit le qua-

trieme nombre penſé, & ſi ce quatrieme nombre eſt le dernier, demandez la ſomme, à laquelle ſi vous ajoutez 4, vous aurez une derniere ſomme, dont les figures repréſenteront comme auparavant les nombres penſés.

Comme dans la ſuppoſition que nous venons de faire de ces quatre nombres penſés 3, 4, 6, 9, en ôtant 1 du double 6 du premier nombre penſé 3, & multipliant le reſte 5 par 5, on a 25, auquel ajoutant le ſecond nombre penſé 4, on a cette ſomme 29, à laquelle ſi l'on ajoute 5 on a cette ſeconde ſomme 34, dont le double eſt 68, d'où ôtant 1, il reſte 67; qui étant multiplié par 5, donne 335, auquel ajoutant le troiſieme nombre penſé 6, on a cette ſomme 341, à laquelle ajoutant 5, on a cette autre ſomme 346, dont le double 692, étant diminué de 1, & le reſte 691, étant multiplié par 5, on a 3455, auquel ajoutant le quatrieme nombre penſé 9, on a cette ſomme 3464, à laquelle ajoutant 5, on a cette derniere ſomme 3469, dont les quatre figures repréſentent les quatre nombres penſés.

PROBLEME XXII.

Une perſonne tenant dans une main un certain nombre pair de piſtoles, & un nombre impair en l'autre main, deviner en quelle main eſt le nombre pair.

FAites multiplier le nombre de la main droite, par un nombre pair tel qu'il vous plaira, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un nombre impair, auſſi tel qu'il vous plaira, comme par 3; puis ayant fait ajouter enſemble les deux produits, faites prendre la moitié de leur ſomme.

Si cette moitié eſt juſte, en ſorte que la ſomme ſoit un nombre pair, vous connoîtrez que le nombre de la main droite, qui a été multiplié par un nombre pair, eſt impair, & par conſéquent que celui de la main gauche qui a été multiplié par un nombre impair, eſt pair. Il arrivera tout le contraire, lorſque la moitié de la ſomme ne ſera pas juſte, c'eſt-à-dire, quand cette ſomme ſera un nombre impair; car dans ce cas le nombre de la main droite, qui a été multiplié par un nombre pair, ſera pair, & celui de la main gauche, qui a été multiplié par un nombre impair, ſera auſſi impair.

Comme ſi dans la main droite il y a 9 piſtoles, & 8 en la gauche, en multipliant le nombre 9 de la droite par 2, & le nombre 8 de la gauche par 3, & ajoutant enſemble les deux produits 18, 24, on aura la ſomme 42, qui étant un nombre pair, fait connoître que le nombre impair 9, qui a été multiplié par le nombre pair 2, eſt en la main droite, & par conſéquent le nombre pair 8 dans la gauche.

Mais ſi dans la main droite il y a 10 piſtoles, & 7 en la gauche, en multipliant le nombre 10 de la droite par 2, & le nombre 7 de la gauche par 3, & en ajoutant enſemble les deux produits 20, 21, on aura leur ſomme 41, laquelle étant un nombre impair, fait connoître que le nombre pair 10, qui a été multiplié par le nombre pair 2, eſt en la main droite, & par conſéquent le nombre impair 7 dans la main gauche. C'eſt par le moyen de ce problême qu'on peut réſoudre la queſtion ſuivante.

REMARQUE.

On voit bien qu'au lieu des deux mains de la même perſonne, on peut ſuppoſer que deux perſonnes auront pris l'un le nombre pair des piſtoles, & l'autre le nombre impair. On fera à l'égard de ces deux perſonnes ce qu'on a fait à l'égard des deux mains.

QUESTION.

Une perſonne tenant une piece d'or dans une main, & une piece d'argent en l'autre, trouver en quelle main eſt la piece d'or, & en quelle main eſt la piece d'argent.

APrès avoir dit qu'on donne ſecretement à l'or une certaine valeur, qui ſoit un nombre pair, comme 8, & à l'argent une certaine valeur qui ſoit un nombre impair, comme 5, faites multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair quelconque, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un nombre impair quelconque, comme par 3. Puis ayant fait ajouter enſemble les deux produits, demandez ſi leur ſomme eſt un nombre pair ou impair. Vous ſçaurez que le nombre eſt pair, en demandant ſi on peut prendre la moitié; & qu'il eſt impair, ſi on vous répond qu'on n'en peut pas prendre la moitié. Si cette ſomme eſt un nombre impair, l'or ſera dans la main droite, & l'argent dans la gauche; & tout au contraire, ſi elle eſt un nombre pair, l'or ſera dans la main gauche, & l'argent en la droite.

PROBLEME XXIII.

Trouver deux nombres dont on connoît la raiſon & la différence.

I.

POur trouver deux nombres dont le premier ſoit au ſecond, par exemple, comme 5 eſt à 2, & dont la différence, ou l'excès du plus grand ſur le plus petit, ſoit, par exemple, 12; multipliez cette différence 12, par le plus petit terme 2 de la raiſon donnée, & diviſez le produit 24, par la différence 3 des deux termes 5, 2, de la même raiſon donnée; le quotient 8 ſera le plus petit des deux nombres qu'on cherche, auquel ajoutant la différence donnée 12, la ſomme 20 ſera le plus grand.

II.

Ou bien multipliez la différence donnée 12 par 5 le plus grand nombre de la raiſon donnée, & diviſez le produit 60 par la différence 3 des deux termes 5, 2, de la même raiſon donnée; le quotient 20 ſera le plus grand des deux nombres qu'on cherche, duquel ôtant la différence donnée 12, le reſte 8 ſera le plus petit, comme auparavant.

III.

Ou bien encore multipliez chacun des deux termes 5, 2, de la raiſon donnée, par la différence donnée 12, & diviſez chacun des deux produits 60, 24, par la différence 3 des deux mêmes termes 5, 2; les quotiens 20, 8, ſeront les deux nombres qu'on cherche, comme auparavant. Par

le moyen de ce problême, on peut aiſément réſoudre la queſtion ſuivante.

QUESTION.

Quelqu'un ayant dans une main autant de pieces de monnoie que dans l'autre, deviner combien il y en a en chaque main.

FAites mettre quelques pieces de la main gauche dans la main droite, par exemple, deux, en ſorte qu'il y ait quatre pieces plus dans la main droite que dans la gauche; & demandez la raiſon du nombre des pieces de la main droite au nombre des pieces de la main gauche, qui ſoit, par exemple, égale à celle de 5 à 3. Alors il faudra multiplier la différence 4 du nombre des pieces d'une main au nombre des pieces de l'autre, par le plus petit terme 3 de la raiſon donnée, & diviſer le produit 12, par la différence 2 des deux termes 5, 3, de la même raiſon donnée, & le quotient 6 ſera le nombre des pieces de la main gauche, auquel ajoutant la différence 4 des deux nombres des pieces qui ſont en chaque main, on aura 10 pour le nombre des pieces de la main droite, auquel ſi l'on ajoute le nombre 6 des pieces de la main gauche, on aura 16 pieces en tout, dont la moitié 8 fait connoître qu'au commencement il y avoit 8 pieces de monnoie dans chaque main.

PROBLEME XXIV.

QUESTION I.

Une perſonne ayant pris autant de jettons, ou pieces de monnoie, dans une main que dans l'autre, deviner combien il y en a en tout.

DItes-lui de tranſporter de la main droite, par exemple, dans la gauche, un certain nombre de jettons, qui ſoit au-deſſous de celui qu'il a dans l'une des mains. Dites-lui encore que de la main gauche, où il a mis ce nombre de jettons, il en tranſporte dans la droite autant qu'il y en étoit reſté. Le nombre des jettons, qui ſera dans la main gauche, ſera double du nombre qu'on a ordonné d'y tranſporter. Si vous demandez donc de combien les jettons qui ſont dans la main gauche, ſurpaſſent ceux qui ſont dans la droite, vous connoîtrez combien il y a de jettons dans cette main droite, ainſi il n'y aura plus qu'à ajouter les jettons qui ſont dans les deux mains, pour ſçavoir combien il y en a en tout.

Si on avoit pris dans chaque main 12 jettons, & que vous en euſſiez fait tranſporter 7 de la main droite dans la gauche, il faudroit faire paſſer de la main gauche dans la droite, autant qu'il en étoit reſté dans cette main droite, c'eſt-à-dire, cinq jettons. Vous ſeriez aſſuré, pour lors, qu'il y auroit dans la main gauche, 14 jettons, qui eſt le double de 7, que vous aviez ordonné d'y tranſporter. Alors vous demanderez de combien le nombre des jettons de la main gauche eſt plus grand que celui de la main droite, on vous répondra qu'il y en a quatre de plus dans celle-ci que dans l'autre : ayant

donc ôté 4 de 14, il reſtera 10 que vous ajouterez à 14. La ſomme 24 eſt le total des jettons qu'on avoit pris.

I. REMARQUE.

Au lieu de demander de combien le nombre des jettons de la main gauche eſt plus grand que celui de la main droite, on peut demander de combien le nombre des jettons de la main gauche ſurpaſſe celui qu'on avoit pris au commencement, qu'on ſuppoſe être 12, ou de combien le nombre des jettons de la main droite eſt plus petit que celui qu'on avoit pris au commencement. Par ce moyen on connoîtroit que le nombre des jettons de la main droite étoit 10, qu'il faudroit ajouter à 14, pour avoir la ſomme 24.

II. REMARQUE.

On a donné dans le problême XVII pluſieurs manieres de deviner un nombre que quelqu'un aura penſé, en voici encore une autre qu'on peut propoſer ſous ce titre.

Deviner combien une perſonne aura de jettons ou de pieces de monnoie dans la main.

FAites multiplier le nombre des jettons par 3, ce triple ſera pair ou impair.

I.

Si ce triple eſt pair, il en faudra prendre la moitié, & faire encore multiplier cette moitié par 3 : ce ſecond triple ſera pair ou impair.

II.

Si ce ſecond triple eſt pair, il en faut faire

prendre la moitié, puis demandez combien cette moitié contient de fois 9. Sçachant combien cette moitié contient de fois 9, vous prendrez autant de fois 4 qu'il y a de fois 9, ſans vous embarraſſer s'il y a du ſurplus; le produit ſera le nombre des jettons qu'on tiendra dans la main.

Exemple où le premier & le ſecond triple ſont pairs.

Si on a penſé 8, ou qu'on ait pris 8 jettons, il faut faire multiplier 8 par 3, le produit eſt 24, qui eſt pair : faites prendre la moitié de 24, qui eſt 12, que vous ferez encore multiplier par 3. Ce ſecond triple eſt 36, qui eſt auſſi pair, ſa moitié eſt 18. Demandez combien cette moitié 18, que vous ne ſçavez point, contient de fois 9; on vous répondra qu'elle contient 2 fois 9 : prenez donc 2 fois 4, & vous aurez 8 pour le nombre des jettons.

III.

Si le ſecond triple eſt impair, il y faut faire ajouter 1, & retenir 2 en vous-même; vous ferez prendre enſuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9; vous prendrez autant de fois 4, qu'elle contiendra de fois 9, ſans vous embarraſſer s'il y a du ſurplus. Mais vous vous ſouviendrez d'y ajouter le 2 que vous avez retenu, à cauſe du ſecond triple impair; la ſomme ſera le nombre penſé ou pris.

Exemple où le premier triple eſt pair, & le ſecond eſt impair.

Si on a pris 6 jettons, vous ferez multiplier 6 par 3, le produit 18 eſt pair, dont la moitié eſt 9 : vous ferez auſſi multiplier cette moitié 9 par

3, le produit eſt 27, auquel vous ferez ajouter 1, & l'on aura 28; mais vous retiendrez deux en vous-même. La moitié de 28 eſt 14, qui ne contient qu'une fois 9 : ainſi ayant ſçu que cette moitié, qui vous eſt inconnue, contient une fois 9, vous prendrez une fois 4, & vous y ajouterez 2, que vous avez retenu, à cauſe du ſecond triple impair, la ſomme 6 eſt le nombre des jettons qu'on a pris.

IV.

Si le premier triple eſt impair, vous y ferez ajouter 1, & retiendrez 1 en vous-même, pour l'ajouter à la fin, comme on le dira. Vous ferez prendre enſuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, & vous ferez encore tripler cette ſomme. Ce ſecond triple ſera pair ou impair.

V.

Si ce ſecond triple eſt pair, vous en ferez prendre la moitié, & vous demanderez combien elle contient de fois 9 : puis vous prendrez autant de fois 4, qu'elle contiendra de 9, & vous augmenterez ce produit de l'unité, que vous avez retenu, à cauſe du premier triple impair, la ſomme ſera le nombre penſé ou pris.

Exemple où le premier triple eſt impair, & le ſecond eſt pair.

Si on a pris 5 jettons, vous ferez prendre le triple de 5 qui eſt 15; auquel vous ferez ajouter 1, parce qu'il eſt impair, la ſomme ſera 16, dont la moitié eſt 8 : vous ferez multiplier cette moitié 8 par 3, le produit eſt 24, dont la moitié eſt 12, qui ne contient qu'une fois 9; ce que vous connoîtrez après l'avoir demandé. Ainſi vous pren-

drez une fois 4, auquel vous ajouterez 1, à cauſe du premier triple impair, & vous aurez 5, qui eſt le nombre pris.

VI.

Mais ſi le ſecond triple eſt impair, vous y ferez ajouter 1; vous ferez prendre enſuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, & vous retiendrez 2 en vous-même. Vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9, vous prendrez autant de fois 4, quelle contiendra de fois 9, & vous y ajouterez 3, à cauſe de 1 retenu en premier lieu pour le premier triple impair, & de 2 retenu en ſecond lieu, pour le ſecond triple impair: la ſomme ſera le nombre pris.

Exemple où les deux triples ſont impairs.

Si on a pris 7 jettons, vous ferez multiplier 7 par 3, le triple ſera 21, que vous ferez augmenter de l'unité, à cauſe qu'il eſt impair, on aura 22, & vous retiendrez 1 en vous-même. Faites enſuite prendre la moitié de 22, qui eſt 11, que vous ferez encore multiplier par 3: & l'on aura 33, qui eſt encore impair: ainſi vous retiendrez 2 en vous-même, à cauſe de ce ſecond triple impair, vous ferez augmenter 33 de l'unité, & l'on aura 34, dont la moitié eſt 17, qui ne contient qu'une fois 9. Ayant donc ſçu que cette moitié contient une fois 9, vous prendrez une fois 4, auquel vous ajouterez 3, ſomme de 1 retenu pour le premier triple, & de 2 retenu pour le ſecond triple: la ſomme 7 eſt le nombre des jettons.

VII.

Obſervez qu'en ſuivant cette méthode, 1°. Si

l'on a penſé 5, ou qu'on ait pris 5 jettons, vous ne trouverez que 1 retenu, à cauſe du premier triple impair, & 2 retenu à cauſe du ſecond triple impair, dont la ſomme eſt 3 : c'eſt-à-dire, que ſi on a pris 3 jettons, les deux triples 9, 15, ſeront impairs, & que 8 moitié du ſecond triple, ne contenant point 9, il ſuffit d'ajouter 1, retenu à cauſe du premier triple impair, & 2, retenu à cauſe du ſecond triple impair; cette ſomme 3 ſera le nombre cherché.

2°. Si l'on a pris deux jettons, le premier triple 6 ſera pair, & le ſecond 9 ſera impair; ainſi la moitié 5 du ſecond triple, ne contenant point 9, vous ne ferez attention qu'au 2 retenu, à cauſe du ſecond triple impair, qui ſera par conſéquent le nombre des jettons qu'on aura pris.

3°. Si l'on n'a pris qu'un jetton, le premier triple 3 ſera impair, & le ſecond 6 ſera pair; ainſi vous ne ferez attention qu'à 1, retenu à cauſe du premier triple impair, qui ſera le nombre pris.

4°. Si l'on n'a point pris de jettons, il n'y a point de triple, & par conſéquent rien à retenir; il n'y a pas non plus de 9; on trouvera donc qu'on a pris 0, c'eſt-à-dire, rien.

VIII.

Au lieu de faire prendre la moitié du ſecond triple, vous pouvez demander combien ce ſecond triple contient de fois 9 : alors vous prendrez autant de fois 2, qu'on vous aura dit qu'il y a de fois 9 : & vous aurez ſoin d'ajouter 1 à ce produit, ſi le premier triple étant impair, vous avez fait ajouter 1.

Exemple.

Si on a penſé 11, ou qu'on ait pris 11 jettons;

faites multiplier 11 par trois, il viendra 33; ayant fait ajouter 1 à 33 pour avoir 34, vous retiendrez 1 en vous-même, puis vous ferez prendre la moitié de 34, qui eſt 17. Vous direz encore de multiplier ce 17 par 3, le produit ſera 51. Enfin ayant ſçu que 9 eſt 5 fois dans 51, vous prendrez 2 fois 5 qui font 10, auquel vous ajouterez 1, à cauſe du premier triple impair, & la ſomme 11 ſera le nombre penſé, ou celui des jettons qu'on a pris.

IX.

Cette maniere de deviner un nombre penſé propoſé dans ce dernier article VIII, eſt la même que celle qui a été propoſée au probl. XVII, art. X. Lorſque le premier triple ſera pair, on n'ajoutera rien à 2 pris autant de fois que le ſecond triple contiendra de fois 9.

QUESTION II.

Une perſonne charitable ſortant de ſa maiſon, rencontre à ſa porte un certain nombre de pauvres. Il veut leur diſtribuer l'argent qu'il a ſur lui: donnant à chacun de ces pauvres neuf ſols, il trouve qu'il lui manque trente-deux ſols; mais leur diſtribuant à chacun ſept ſols, il lui reſte vingt-quatre ſols. On demande combien il y avoit de pauvres, & combien cette perſonne avoit d'argent dans ſa bourſe.

IL faut ajouter 24 & 32, la ſomme ſera 56, dont la moitié 28 eſt le nombre des pauvres. Si l'on multiplie 28, nombre des pauvres, par 7, nombre des ſols qu'on leur a donné, & qu'au produit 196 on ajoute les 24 ſols de ſurplus, on

aura 220 ſols pour l'argent de la perſonne charitable.

REMARQUE.

On auroit encore eu la même ſomme 220 ſols, ſi l'on avoit multiplié 28, nombre des pauvres, par 9, nombre des ſols qu'on a voulu donner, & que du produit 252 on eût ôté les 32 ſols qui manquoient.

QUESTION III.

De l'âne & du mulet.

Il arriva qu'un mulet & un âne faiſant voyage enſemble, portoient chacun un certain nombre de barrils de vin. L'âne ſe plaignoit de ce qu'il étoit trop chargé. Le mulet lui dit : vous n'avez point raiſon de vous plaindre ; car ſi vous me donniez un de vos barrils, j'en aurois deux fois autant que vous, & ſi je vous en donnois un des miens, nous en porterions l'un autant que l'autre. Combien de barrils avoient ils chacun ?

LE mulet avoit ſept barils de vin, & l'âne en avoit cinq : l'âne donnant un baril au mulet, n'en auroit plus eu que quatre, & le mulet en auroit eu huit, qui eſt le double de la charge de l'âne ; mais ſi le mulet avoit donné un de ſes barils à l'âne : il en auroit encore eu 6, & l'âne en auroit auſſi eu ſix.

REMARQUE.

On me permettra de mettre ici cette queſtion avec ſa ſolution en vers latins.

Und

Unà cum mulo vinum portabat aſella,
Atque ſuo graviter ceu pondere preſſa gemebat.
Talibus at dictis mox increpat ille gementem :
Mater, quid luges tenera de more puella ?
Dupla tuis, ſi des menſuram, pondera geſto ;
At ſit menſuram capias, æqualia porto.

Dic mihi menſuras ſapiens geometer iſtas ;
Non aliter Phœbi nomine dignus eris.

Unam aſina accipiens, amittens mulus & unam ;
Si fiant æqui, certè utrique antè duobus
Diſtabant à ſe. Accipiat ſi mulus ab unam,
Amittatque aſina unam, tunc diſtantia fiet
Inter eos quatuor. Muli at cum pondera dupla
Sint aſinæ ; huic ſimplex, mulo eſt diſtantia dupla :
Ergo habet hæc quatuor tantum, muluſque habet octo.
Unam aſinæ ſi addas, ſi reddat mulus & unam,
Tunc ignota priùs tibi pondera clara patebunt.

SOLUTIO.

Menſuras quinque hæc, & ſeptem mulus habebat.

On peut exprimer cette queſtion en différentes manieres. En voici une en latin avec ſa réponſe.

Ova olim juvenes duo ferebant,
Horum ſic comitem laceſſit alter :
Unum ſi dederis mihi tuorum
Ovorum, numerus mihi tibique
Par erit : cui mox regeſſit alter ;
Tu ſi mi dederis unum tuorum,
Duplo plura ego bajulabo quàm tu.
Dic ergo tulerit quot ova uterque ?

SOLUTIO.

Tot prior ova tulit, luſtrum quot continet annos.
Poſterior vaga quot ſidera mundus habet.

Ce que les deux jeunes gens viennent de dire touchant les œufs qu'ils portent, ou ce que l'on fait dire au mulet & à l'âne, ſe met dans la bouche de deux amis, qui ſe trouvent enſemble : l'un dit à l'autre, ſi je vous donnois une de mes piſtoles, vous en auriez autant que moi : l'autre répond, & moi ſi je vous en donnois une des miennes, vous en auriez deux fois autant que moi. Il paroît que chacun ſçait le nombre des piſtoles de ſon ami. Mais il n'en eſt point de même de ceux à qui on propoſe cette queſtion; il faut qu'ils le devinent.

QUESTION IV.

Les trois graces portant des couronnes de fleurs, rencontrerent les neufs muſes, à qui elles préſenterent chacune un nombre égal de couronnes. La diſtribution faite, il ſe trouva que les graces & les muſes en avoient chacune autant l'une que l'autre. On demande combien les graces avoient de couronnes, & combien elles en donnerent.

LEs graces avoient chacune douze couronnes & chacune en donna une. On peut ſuppoſer encore qu'elles en avoient 24, & que chacune en donna deux; ou bien qu'elles en avoient 36, & que chacune en donna trois, & ainſi de ſuite, pourvu qu'en prenant les multiples de 12, on augmente à proportion le nombre des couronnes qui ſeront préſentées.

QUESTION V.

Trois perſonnes veulent acheter une maiſon 26000 livres : mais ils ſont convenus que l'un donneroit la moitié de l'argent, l'autre le tiers, & le troiſieme le quart. On demande combien ils doivent donner chacun.

CElui qui a promis la moitié de l'argent, doit donner 12000 livres : celui qui a promis le tiers doit donner 8000 livres, & celui qui a promis le quart doit donner 6000 livres. Ces trois ſommes font enſemble 26000 livres.

QUESTION VI.

Un pere en mourant laiſſe ſa femme enceinte : il ordonne par ſon teſtament que ſi elle accouche d'un garçon, il héritera des deux tiers de ſon bien, qui eſt 3000 écus, & l'autre tiers ſera pour la mere ; mais ſi elle accouche d'une fille, cette fille n'héritera que d'un tiers, & les deux autres tiers ſeront pour la mere. Il arrive que la mere accouche d'un garçon & de deux filles. On demande quel doit être le bien de chacun.

LA part qui doit revenir au garçon eſt de 1500 écus, moitié du bien du pere ; celle qui reviendra à la mere eſt de 750 écus, & les filles auront chacune 375 écus. Ces quatre ſommes font enſemble 3000 écus.

QUESTION VII.

On dit d'une perſonne qu'elle a paſſé le quart de ſa vie en l'enfance, la cinquieme partie en la jeuneſſe,

le tiers en l'âge viril, & qu'il y a 13 ans qu'elle a commencé à entrer dans la vieilleſſe. On demande l'âge de cette perſonne.

IL eſt facile de répondre que cette perſonne a ſoixante ans, qu'elle a paſſé 15 ans dans l'enfance, 12 ans dans la jeuneſſe, 20 ans dans l'âge viril; qu'enfin à 47 ans elle a commencé à entrer dans la vieilleſſe.

QUESTION VIII.

Quarante-une perſonnes ſe ſont trouvées à un repas; il y avoit des hommes, des femmes & des enfans. La dépenſe a été de 40 ſols: les hommes ont payé 4 ſols par tête, les femmes 3 ſols chacune, & les enfans 1 denier chacun. On demande le nombre des hommes, celui des femmes, & celui des enfans.

IL y avoit cinq hommes, trois femmes, & trente-trois enfans. Les cinq hommes ont payé 20 ſols, les trois femmes ont payé 9 ſols, & les trente-trois enfans ont payé 11 ſols. Ces ſommes font enſemble 40 ſols; & le nombre des hommes, des femmes & des enfans, fait quarante-une perſonnes.

QUESTION IX.

Un lion de bronze, placé ſur le baſſin d'une fontaine, peut jetter l'eau par les yeux, par la gueule, & par le pied droit. S'il jette l'eau par l'œil droit, il emplira le baſſin en deux jours: s'il la jette par l'œil gauche, il l'emplira en trois jours: s'il la jette par le pied, il l'emplira en quatre jours; enfin s'il la jette par la gueule, il l'emplira en ſix heures. On demande en combien de tems le baſſin

ſera rempli, ſi le lion jette l'eau en même tems par les yeux, par le pied, & par la gueule.

TOutes ces ouvertures laiſſant écouler l'eau en même tems, le baſſin ſera rempli en quatre heures, & environ quarante-quatre minutes. *Voyez la remarque de la queſtion ſuivante.*

QUESTION X.

Trois imprimeurs veulent entreprendre l'impreſſion d'un livre : l'un le peut imprimer en ſix mois ; l'autre ne le peut qu'en neuf mois ; & le troiſieme moins diligent, ou ayant moins d'ouvriers, ne le peut imprimer qu'en douze mois. On demande en combien de tems cet ouvrage ſera imprimé, ſi on fait travailler les trois imprimeurs en même tems.

CEs imprimeurs travaillant tous en même tems à différentes parties de ce livre, ils l'auront imprimé en deux mois vingt-trois jours & une heure ou environ.

REMARQUES.

L'un de ces imprimeurs fait en un mois la ſixieme partie de l'ouvrage ; l'autre la neuvieme, & l'autre la douzieme : ces fractions ajoutées enſemble font $\frac{13}{36}$. Pour avoir le tems demandé, il faut faire une regle de trois, dont le premier terme ſera 13, le ſecond ſera un mois, & le troiſieme ſera 36 : le quatrieme terme donnera le tems demandé, après avoir réduit les reſtes dans les parties des mois & des jours.

Il en eſt de même à l'égard de la queſtion précédente : mais il faut réduire les jours en heures, à cauſe des ſix heures dont il eſt parlé. L'œil droit du lion jettera en une heure un quarante-huitieme d'eau pour emplir le baſſin; l'œil gauche en jettera un ſoixante-douzieme; le pied droit en jettera un quatre-vingt-ſeizieme, & la gueule en jettera un ſixieme. Toutes ces fractions reduites en une ſeule, on fera une regle de trois, comme on vient de le dire, dont le premier terme ſera le numérateur, le ſecond une heure, & le troiſieme ſera le dénominateur. Il viendra au quatrieme terme 4 heures & environ 44 minutes.

PROBLEME XXV.

Deux perſonnes étant convenues de prendre à volonté des nombres moindres qu'un nombre propoſé, en continuant alternativement juſqu'à ce que tous leurs nombres faſſent enſemble un nombre déterminé plus grand que le propoſé : faire qu'on arrive le premier à ce nombre déterminé plus grand.

POur faire que le premier arrive, par exemple, à cent, en ſuppoſant qu'il lui eſt libre, auſſi-bien qu'au ſecond, de prendre alternativement un nombre tel qu'il voudra, pourvu qu'il ſoit moindre, par exemple, que 11, il faut qu'il ôte ce nombre 11 de 100, autant de fois qu'il pourra, & alors il reſtera ces nombres 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, dont il doit ſe ſouvenir, & prendre le premier 1; ainſi quelque nombre que le ſecond prenne, il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au ſecond nombre 12; car ſi le ſecond prend, par exemple, 3, qui avec 1 fait 4, le pre-

mier n'a qu'à prendre 8, pour parvenir à 12 : après quoi, quelque nombre que prenne le ſecond, il ne pourra pas empêcher que le premier ne parvienne au troiſieme nombre 23 ; car s'il prend, par exemple, 1, qui avec 12 fait 13, le premier n'a qu'à prendre 10, avec 13 qui fait 23 ; enſuite quelque nombre que le ſecond prenne, il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au quatrieme nombre 34, enſuite au cinquieme 45, puis au ſixieme 56, de-là au ſeptieme 67, de-là au huitieme 78, de-là au dernier 89, & enfin à 100.

Si le ſecond vouloit gagner, il eſt évident qu'il devroit prendre au commencement un nombre qui fût le reſte à 12 du nombre que le premier auroit pris, afin de pouvoir parvenir à 12 : comme ſi le premier avoit pris 2, le ſecond devroit prendre 10 : mais ſi le premier ſçait la fineſſe, il ne peut prendre que 1, & alors le ſecond devroit prendre 15 ; ce qui ne ſe peut, parce qu'ils ſont convenus prendre des nombres moindres que 11. Mais ces ſortes de jeux ne ſe font ordinairement qu'avec ceux qui les ignorent. Ainſi ſi le ſecond ne ſçait pas la fineſſe du jeu, le premier qui veut gagner ne doit pas prendre toujours 1 au commencement, mais quelqu'autre nombre, après avoir gagné la premiere partie, en riſquant de perdre la ſeconde, pour mieux cacher l'artifice.

Si le premier veut gagner, il ne faut pas que le plus petit nombre propoſé meſure le plus grand : car dans ce cas le premier n'auroit pas une regle infaillible pour gagner. Par exemple, ſi au lieu de 11 on avoit pris 10 qui meſure 100, en ôtant 10 de cent, autant de fois qu'on le peut, on auroit ces nombres 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, dont le premier 10 ne pourroit pas être pris par le

premier ; ce qui fait qu'étant obligé de prendre un nombre moindre que 10, ſi le ſecond étoit auſſi fin que lui, il pourroit prendre le reſte à 10, & ainſi il auroit une regle infaillible pour gagner.

Il n'eſt pas néceſſaire d'ôter le plus petit nombre du plus grand, autant de fois qu'on le peut, pour ſçavoir le nombre que le premier doit prendre pour gagner; car il ſuffit de diviſer le plus grand par le plus petit, & le reſte de la diviſion ſera le nombre que le premier doit choiſir au commencement. Comme dans l'exemple propoſé en diviſant 100 par 11, il reſte 1 pour le premier nombre du premier, auquel s'il ajoute 11, il aura 12 pour ſon ſecond nombre, auquel ajoutant encore 11, il aura 23 pour ſon troiſieme nombre, & ainſi de ſuite juſqu'à 100.

PROBLEME XXVI.

Diviſer un nombre donné en deux parties, dont la raiſon ſoit égale à celle de deux nombres donnés.

QU'il faille diviſer le nombre donné 60, en deux autres nombres, tel que le plus petit ſoit au plus grand comme 1 eſt à 2, en ſorte qu'une partie ſoit double de l'autre.

I.

Ajoutez enſemble les deux termes 1, 2, de la raiſon donnée; diviſez par leur ſomme 3, le nombre donné 60; le quotient 20 ſera le plus petit des deux nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du nombre donné 60, le reſte 40 ſera le plus grand nombre.

II.

Ou bien multipliez les deux termes 1, 2, de la raiſon donnée, chacun par le nombre donné 60, diviſez les produits 60, 120, chacun par la ſomme 3 des deux mêmes termes 1, 2, & les deux quotiens 20, 40, ſeront les deux nombres qu'on cherche.

Ce problême eſt le même que la ſeconde queſtion du livre premier de Diophante, & l'on peut aiſément par ſon moyen réſoudre les queſtions ſuivantes.

QUESTION I.

Faire la monnoie d'un écu blanc en deux eſpeces différentes, en ſorte qu'il y ait autant d'une eſpece que de l'autre.

COmme l'on cherche une ſolution en nombres entiers, il eſt aiſé de connoître que cette queſtion ne ſe peut pas réſoudre généralement pour toutes ſortes de monnoies. Afin que la queſtion ſoit poſſible, il faut que la ſomme des deux termes qui expriment la raiſon des deux eſpeces propoſées, puiſſe diviſer exactement la valeur d'un écu blanc, lorſqu'il ſera réduit en la monnoie la plus baſſe.

Ainſi en faiſant valoir 60 ſols un écu blanc, ou 240 liards, on connoît qu'on en peut donner la monnoie en ſols & en liards, parce que ſa valeur 240 ſe peut diviſer par la ſomme 5 des deux termes 1, 4, qui expriment la raiſon d'un liard à un ſol, parce que quatre liards font un ſol. Si donc on diviſe 240 liards par 5, on aura 48 liards, & par conſéquent 48 ſols, pour la ſolution de la

queſtion. Car 48 ſols avec 48 liards, qui valent 12 ſols, font 60 ſols, telle qu'eſt la valeur ſuppoſée d'un écu blanc.

On connoîtra de la même façon, qu'il faut 12 ſols & 12 pieces de quatre ſols pour faire un écu de 60 ſols: parce que diviſant 60 par 5, le quotient eſt 12; & qu'il faut 13 ſols & 13 pieces de quatre ſols pour faire un écu de 65 ſols, parce que diviſant 65 par 5, le quotient eſt 13.

De même, pour donner en ſols & en pieces de quatre ſols la monnoie d'un louis d'or, valant 11 livres, ou 220 ſols, en ſorte qu'il y ait autant de ſols que de pieces de quatre ſols, il faut 44 ſols, & 44 pieces de quatre ſols, parce que diviſant 220 par 5, le quotient eſt 44: & que pour donner dans les deux mêmes eſpeces la monnoie d'un louis d'or valant 12 livres 5 ſols, ou 245 ſols, en ſorte qu'il y ait autant d'une eſpece que de l'autre, il faut 49 ſols & 49 pieces de quatre ſols, parce que diviſant 245, par 5, le quotient eſt 49.

Enfin l'on connoîtra que pour faire la monnoie en ſols & en deniers d'un écu valant 65 ſols, ou 780 deniers, en ſorte qu'il y ait autant de ſols que de deniers, il faut 60 ſols & 60 deniers, parce que diviſant 780 par 13, qui eſt la ſomme des deux termes 1, 12, qui exprime la raiſon d'un denier à un ſol, parce qu'un ſol contient 12 deniers, le quotient eſt 60. Ainſi des autres.

QUESTION II.

Un marchand de vin n'a que deux ſortes de vins, l'un à 10 ſols, & l'autre à 5 ſols la bouteille. On lui demande 30 bouteilles de vin à 8 ſols. Que doit-il faire pour mêler ces deux vins, de ſorte que la bouteille revienne à 8 ſols.

IL faut qu'il prenne les différences du prix de ſes vins au prix du vin demandé. Ces différences ſont 2, 3, qui ſeront les termes d'une raiſon donnée. La ſomme de ces différences eſt 5. Premierement pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 5 ſols, qu'il doit prendre pour le mêlange, il faut, ſelon l'article II, qu'il multiplie 30, nombre des bouteilles demandées, par 2, différence de 10., prix de l'un de ces vins, & de 8, prix du vin demandé, & qu'il diviſe le produit 60, par 5, ſomme des différences : le quotient 12 eſt le nombre des bouteilles de vin à 5 ſols, qu'il prendra pour le mêlange. Secondement, pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 10 ſols, qu'il doit prendre pour le mêlange, il faut, ſuivant le même article II, qu'il multiplie le même nombre 30 par 3, différence de 5, prix de l'autre de ſes vins, & de 8, prix des vins demandés, & qu'il diviſe le produit 90 par 5, ſomme des différences : le quotient 18 eſt le nombre des bouteilles de vin à 10 ſols, qu'il prendra pour le mêlange. Ainſi ayant mêlé 12 bouteilles de vin à 5 ſols, avec 18 bouteilles à 10, il en aura 30, qui reviendront à 8 ſols la bouteille. Ce qu'il eſt aiſé de reconnoître en multipliant 18 par 10, & 12 par 5, les deux produits 180, 60, ajoutés, ſont égaux à 240, produit de 30, par 8.

PROBLEME XXVII.

Trouver un nombre tel qu'étant diviſé ſéparément par des nombres donnés, il reſte par-tout 1; *& étant diviſé par un autre nombre donné, il ne reſte rien.*

I.

POur trouver un nombre tel qu'étant diviſé ſéparément par les deux nombres donnés, 5, 7, chaque reſte ſoit 1, & étant diviſé par ce troiſieme nombre donné 3, qui doit être premier avec les deux précédens, il ne reſte rien; multipliez enſemble les deux premiers nombres donnés, 5, 7, pour avoir leur produit 35, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 36, qui ſera tel qu'étant diviſé par 5 & par 6, il reſtera 1. Et comme il arrive que ce même nombre 36 étant diviſé par le troiſieme nombre donné 3, il ne reſte rien; il s'enſuit que 36 eſt le nombre qu'on cherche.

Mais on peut trouver une infinité d'autres nombres plus grands, qui ſatisferont aux conditions du problême; ce qui ſe fera par le moyen du premier & plus petit nombre trouvé 36, en cette ſorte.

Pour trouver un ſecond nombre, ajoutez le premier nombre trouvé 36, au produit 105 des trois nombres donnés 5, 7, 3, & la ſomme 141 ſera le ſecond nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 105, on aura 246 pour troiſieme nombre, auquel ſi l'on ajoute le même produit 105, on aura 351 pour quatrieme nombre, & ainſi de ſuite.

II.

De même pour trouver un nombre tel qu'étant

diviſé ſéparément par les trois nombres donnés 2, 3, 5, il reſte 1, & étant diviſé par ce quatrieme nombre donné 11, qui doit auſſi être premier avec les trois précédens 2, 3, 5, il ne reſte rien; multipliez enſemble les trois premiers nombres donnés 2, 3, 6, pour avoir leur produit 30, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 31, qui étant diviſé par chacun des trois nombres donnés, 2, 3, 5, donnera pour reſte 1. Si ce nombre 31, étant diviſé par le quatrieme nombre donné 11, il ne reſte rien, il ſeroit celui qu'on cherche; mais parce qu'il reſte 9, le nombre 31 n'eſt pas celui qu'on cherche. Pour le trouver, voici ce qu'on fera.

Diviſez 30 par 11, & ayant négligé le quotient 2, ſervez-vous du reſte 8 en cette ſorte. Cherchez au nombre 11, un multiple, qui ſurpaſſe de l'unité un multiple de 8. *Vous trouverez que 33, multiple de 11, ſurpaſſe de l'unité 32, multiple de 8. Diviſez 32 par 8, reſte trouvé, & vous aurez pour quotient 4, par lequel vous multiplierez le produit déja trouvé 30. Ce ſecond produit 120, augmenté de l'unité, ſera le nombre cherché: car 121 eſt exactement diviſible par 11, & donne pour reſte 1, étant diviſé par 2, 3, 5. Par le moyen de ce nombre 121, on en pourra trouver autant qu'on voudra, en cette ſorte.

Pour avoir un ſecond nombre, ajoutez le premier nombre trouvé, 121 à 330, produit des qua-

* On ne peut faire cette recherche, qu'en eſſayant, ou, comme on dit, en tâtonnant. Mais comme il ne s'agit que des petits nombres, il n'eſt point difficile de trouver ces multiples. Il ne ſeroit pas néceſſaire de chercher un multiple de 11, ſi on trouvoit un multiple de quatre, qui fût moindre de l'unité qu'un multiple de 11.

tre nombres donnés 2, 3, 5, 11, & la ſomme 451 ſera le ſecond nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 330, on aura 781 pour troiſieme nombre, auquel, ſi on ajoute pareillement le même produit 330, on aura 1111 pour quatrieme nombre, & ainſi de ſuite.

III.

On pourra par un ſemblable raiſonnement trouver un nombre tel qu'étant diviſé ſéparément par ces trois nombres donnés 3, 5, 7, il reſte un autre nombre que l'unité, par exemple, 2, & étant diviſé par ce quatrieme nombre donné 8, il ne reſte rien. Multipliez enſemble les trois premiers nombres donnés, 3, 5, 7, diviſez leur produit 105 par le quatrieme nombre donné 8, & négligeant le quotient, ſervez-vous du reſte 1, auquel vous chercherez un multiple qui ſoit moindre que 8 de 2, * parce qu'il s'agit de trouver un nombre qui ait 2 pour reſte. Ce multiple eſt 6, diviſez-le par un, qui eſt le reſte trouvé : le quotient eſt 6, par lequel vous multiplierez ce premier produit 105. Ce ſecond produit 630, augmenté de 2, ſera le nombre cherché : car 632 eſt exactement diviſible par 8, & il donne 2 pour reſte, ſi on le diviſe par 3, 5, 7. Ce même nombre 632 ſervira à en trouver autant d'autres qu'on voudra qui auront la même propriété, par une méthode ſemblable à la précédente, comme vous allez voir.

Pour trouver un ſecond nombre plus grand, ajoutez le nombre trouvé 632 au produit 840

* Il n'eſt point néceſſaire de chercher ici une multiple de 8, puiſque 8 ſurpaſſe 6, multiple de 1, de 2.

des quatre nombres donnés, 3, 5, 7, 8, & la ſomme 1472 ſera le ſecond nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 840, on aura 2312 pour le troiſieme nombre, auquel ſi l'on ajoute encore le même produit 840, on aura 3152 pour le quatrieme nombre, & ainſi de ſuite.

IV.

De même, pour trouver un nombre tel qu'étant diviſé par ces trois nombres donnés 3, 5, 7, il reſte 2, & étant diviſé par ce quatrieme nombre donné 11, il ne reſte rien; diviſez le produit 105 des trois premiers nombres donnés 3, 5, 7, par le quatrieme 11, & négligeant le quotient, ſervez-vous du reſte 6, pour l'uſage que je vais indiquer. Cherchez un multiple de 11, qui ſurpaſſe de 2 un multiple de 6. * Vous trouverez 44, multiple de 11, & 42 multiple de 6. Diviſez 42 par le reſte 6 trouvé, le quotient ſera 7, par lequel vous multiplierez le premier produit 105. Ce ſecond produit 735, augmenté de 2, ſera le nombre cherché. Car 737 eſt diviſible ſans reſte par 11, & ſi on le diviſe par ces nombres, 3, 5, 7, ſéparément, il reſte 1.

* Voyez la note de la page 189.

Par le moyen de ce nombre 737, on en pourra trouver autant d'autres qu'on voudra, en y ajoutant 1155, produit des nombres 3, 5, 7, 11, comme on l'a enſeigné dans les exemples précédens.

V.

De même, pour trouver un nombre tel qu'étant diviſé par 5, ou par 7, ou par 8, il reſte 3, & étant diviſé par 11, il ne reſte rien, on multipliera enſemble ces trois nombres 5, 7, 8, dont on

diviſera le produit 280 par 11, pour avoir le reſte 5, en négligeant le quotient. On cherchera enſuite un multiple de 11, qui ſurpaſſe de 3 un multiple de 5. On trouvera 33, multiple de 11, & 30, multiple de 5 : puis on diviſera 30 par 5, & l'on aura pour quotient 6, par lequel on multipliera le premier produit 280. Ce ſecond produit 1680, augmenté de 3, ſera le nombre cherché. Car 1683 ſe diviſe exactement par 11, & donne 3 pour reſte, étant diviſé par les nombres propoſés 5, 7, 8.

C'eſt par le moyen de ce problême qu'on peut réſoudre la queſtion ſuivante.

QUESTION.

Trouver combien il y avoit de louis d'or dans une bourſe qu'une perſonne dit avoir perdue, & qui aſſure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en reſtoit toujours un, & qu'en les comptant ſept à ſept, il n'en reſtoit point.

IL s'agit ici de trouver un nombre tel qu'étant diviſé par celui qu'on voudra des trois nombres donnés 2, 3, 5, il reſte 1, & étant diviſé par le quatrieme nombre donné 7, il ne reſte rien ; car ce nombre ſera celui des louis d'or qui étoient dans la bourſe. Et comme il y a pluſieurs nombres qui peuvent ſatisfaire à la queſtion, comme on a vu au problême précédent, on pourra juger par la groſſeur, ou par la peſanteur de la bourſe, du nombre des louis d'or qu'elle pouvoit contenir.

Mais pour trouver le moindre de tous ces nombres, cherchons premierement un nombre qui ſoit exactement

exactement diviſible par 2, par 3, & par 5, & qui étant augmentée de 1, ſoit auſſi exactement diviſible par 7. Si on multiplie enſemble les trois premiers nombres donnés 2, 3, 5, leur produit 30 ſera diviſible par chacun de ces trois nombres; mais en y ajoutant 1, la ſomme 31 n'eſt pas diviſible par le quatrieme nombre donné 7; car il reſte 3. Diviſez donc 30 par le quatrieme nombre propoſé 7; la diviſion donnera 2 pour reſte, & vous négligerez le quotient. Prenez 6 multiple de 2, qui eſt moindre que 7 de l'unité. * Diviſez le par 2, reſte trouvé, & vous aurez 3 pour quotient, par lequel vous multiplierez le premier produit 30. Ce ſecond produit 90, augmenté de 1, ſera le premier nombre cherché; car 91 ſe diviſe ſans reſte par 7, & donne 1 pour reſte, s'il eſt diviſé par les nombres propoſés 2, 3, 5.

* Voyez la note de la page 189.

Pour trouver un ſecond nombre plus grand, qui ſatisfaſſe à la queſtion, multipliez enſemble les quatre nombres donnés, 2, 3, 5, 7, ajoutez à leur produit 210 le premier & plus petit nombre trouvé 91, la ſomme 301 ſera le ſecond nombre qu'on cherche; auquel ſi l'on ajoute le produit précédent 210, la ſomme 511 ſera un troiſieme nombre qui ſatisfera; auquel pareillement ſi l'on ajoute le même produit 210, la ſomme 721, ſera un quatrieme nombre qui ſatisfera, & ainſi à l'infini.

Ainſi pour la réſolution de la queſtion, l'on peut dire que dans la bourſe perdue, il pouvoit y avoir 91 louis d'or, ou bien 301, ou bien 511, ou bien encore 721; & c'eſt ſelon la groſſeur de la bourſe comme nous avons déja dit, qu'il en faut juger.

I. *REMARQUE.*

On peut propoſer cette queſtion d'une autre

maniere. Une pauvre femme porte au marché un paniers d'œufs; mais venant à être heurtée, elle laiſſe tomber ſon panier, & tous les œufs ſont caſſés. Celui qui a cauſé ce malheur veut payer les œufs; il demande à la femme combien elle avoit d'œufs dans ſon panier: elle lui répond qu'il y en avoit environ trois cens; que les comptant deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, ſix à ſix, il reſtoit toujours 1, & les comptant ſept à ſept, il ne reſtoit rien.

La queſtion eſt ici déterminée par la condition que la femme a miſe, en diſant qu'il y avoit environ 300 œufs. Ainſi le nombre 301 ſera le nombre des œufs. Si la condition n'y avoit point été miſe, il en auroit fallu juger par la grandeur du panier. Mais on en jugera plus ſûrement en demandant à la femme à peu près le nombre, comme de 300, ou de 500, ou de 700, &c. Alors, ſelon ſa réponſe, on choiſit celui des nombres qui approche le plus de celui qu'elle a répondu.

II. REMARQUE.

Peut-être ne trouvera-t-on pas mauvais qu'on mette ici la ſolution du premier article de ce problême par algebre; on ſuivra la méthode que M. de Lagny, de l'académie royale des ſciences, a indiqué dans ſes nouveaux élémens d'arithmétique & d'algebre, p. 430. Elle peut être d'un grand ſecours dans les problêmes indéterminés.

I.

Il s'agit de trouver un nombre x tel qu'étant diviſé par 3, il ne reſte rien; étant diviſé par 5,

il reſte 1, & étant diviſé par 7, il reſte encore 1. La queſtion propoſée ſe réduira à ces équations. 1°. $\frac{x}{3}=p$. 2°. $\frac{x-1}{5}=n$.

Je choiſis les deux premieres équations pour les comparer l'une à l'autre, & je les réduis à cette expreſſion. 4°. $x=3p=5m+1$: par conſéquent $p=\frac{5m+1}{3}$ où m eſt indéterminé : pour le trouver, voici le raiſonnement que je fais.

Puiſque $5m+1$ doit être diviſé exactement par 3, toutes les différences de $5m+1$ à 3, ſon dénominateur, ou, ce qui eſt la même choſe, à $3m$, doivent être auſſi diviſées par 3. Ainſi pour trouver la derniere différence, où m demeure ſeule, j'ôte autant de fois qu'il eſt poſſible $3m$ de $5m+1$: la premiere différence eſt $2m+1$, & j'ai $\frac{2m+1}{3}$: mais m n'étant point ſeule, cette expreſſion ne convient pas : j'ôte donc $2m+1$ de $3m$, ſon dénominateur, & j'ai $m-1$, qui étant diviſé par 3, donne ce rapport $\frac{m-1}{3}$.

Pour trouver la valeur de m, qui eſt indéterminé, je ſuppoſe, 1°. $\frac{m-1}{3}=0$, qui donne $m=1$, 2°. $\frac{m-1}{3}=1$, qui donne $m=4$. 3°. $\frac{m-1}{3}=2$, qui donne $m=7$, &c. $m=1$ ne pouvant ſatisfaire aux équations comparées, je prends $m=4$, qui donne la ſolution des équations comparées dans la quatrieme expreſſion $x=3p=5m+1$: car $x=21$, qui étant diviſé par 3, n'a point de reſte, & étant diviſé par 5, donne 1 pour reſte.

Mais ſi je ſubſtitue 21, dans la troiſieme ſuppoſition $\frac{x-1}{7}$, je trouve que $\frac{21-1}{7}$, ne donne point au quotient un nombre qui ait 1 pour reſte. Je

cherche donc une autre valeur de m dans toutes celles qu'on peut trouver, & j'eſſaie celle qui peut convenir : pour la trouver plus ſûrement, voici encore le raiſonnement que je fais.

Puiſque dans la recherche que j'ai fait de la valeur de m, par cette expreſſion $\frac{m-1}{3}$, j'ai ſuppoſé que $\frac{m-1}{3}$, étoit égal à un nombre pris à volonté, tel que 0, 1, 2, 3, 4, &c. Je ſuppoſe qu'un de ces nombres pris à volonté & indéterminé, ſoit égal à f, ainſi j'aurai $\frac{m-1}{3} = f$, d'où l'on aura $m = 3f + 1$. Subſtituant donc ce $3f + 1$ dans la quatrieme équation $x = 5m + 1$, je trouverai $5m + 1 = 15 + 5f + 1 = x$. Ainſi dans la troiſieme équation $\frac{x-1}{7} = n$, je ſubſtitue $15f + 6$, au lieu de x, ce qui me donne $\frac{15f+5}{7}$. J'ôte $7f$ autant de fois que je le puis de $15f + 5$, pour avoir la derniere différence $f + 5$, qui étant diviſée par 7, donne $\frac{f+5}{7}$.

Ainſi pour avoir la valeur de f, je ſuppoſe, 1°. $\frac{f+5}{7} = 0$, qui donne $f = -5$, qui ne peut convenir. 2°. $\frac{f+5}{7} = 1$, qui donne $f = 7 - 5 = 2$, & cette valeur de f donne la ſolution des trois équations propoſées. Car ſubſtituant 2 à la place de f, dans cette équation $m = 3f + 1$, j'aurai $m = 7$ & $x = 5m + 1 = 36$, qui eſt le nombre cherché.

On trouvera d'autres nombres que 36, ſi on ſuppoſe $\frac{f+5}{7}$ égal à 2, à 3, à 4, &c.

II.

Si j'avois compaté enſemble la troiſieme & la ſeconde équation $\frac{x-1}{7} = n$ & $\frac{x-1}{5} = m$, j'aurois eu $x = 7n+1 = 5m+1$, & $n = \frac{5m}{7}$, & l'on auroit vu que m doit être égal à 7, ou à un multiple de 7. Car ſi l'on ôte $5m$ de $7m$, on aura pour premier reſte $2m$, dont le double $4m$ étant ôté de $5m$, donnera m : par conſéquent on aura $\frac{m}{7}$. Si on fait $\frac{m}{7} = 1$, on aura $m = 7$. Si l'on fait encore $\frac{m}{7} = 2$, on aura $m = 14$, &c. $m = 7$ ſatisfait à la queſtion : car $x = 5m + 1 = 36$. $m = 14$ y ſatisfait auſſi, & donne un autre nombre que 36 ; & ainſi de ſuite à l'infini.

III.

Si l'on avoit propoſé un plus grand nombre d'équations, comme, 1°. $\frac{x-1}{2} = m$. 2°. $\frac{x-1}{3} = n$, 3°. $\frac{x-1}{5} = p$. 4°. $\frac{x}{11} = q$. On auroit fait 5°. $x = 2m + 1 = 3n + 1$, & par conſéquent $m = \frac{3n}{2}$. J'ôte $2n$ de $3n$, il reſte n. Donc $m = \frac{n}{2}$. D'où je fais 1°. $\frac{n}{2} = 1$, qui donne $n = 2$. 2°. $\frac{n}{2} = 2$, qui donne $= 4$. 3°. $\frac{n}{2} = 3$, qui donne $n = 6$, &c. Je ſubſtitue quelqu'une de ces valeurs d'n dans la cinquieme équation $x = 3n+1$, & je trouve que les deux valeurs 2 & 4 de n ſatisfont dans les deux premieres équations comparées ; mais elles ne ſatisfont point dans la troiſieme queſtion $\frac{x-1}{2} = p$.

C'eſt pourquoi je prens $n = 2f$, que je ſubſtitue dans la cinquieme équation $x = 3n + 1$, & j'ai,

6°. $x = 6f + 1$, qui étant ſubſtitué dans $\frac{x-1}{5}$, troiſieme expreſſion, donne $\frac{6f}{5}$, & ôtant $5f$ de $6f$, il reſtera f qui diviſé par 5, donnera $\frac{f}{5}$, & par conſéquent 1°, $\frac{f}{5} = 1$, qui donne $f = 5$. 2°. $\frac{f}{5} = 2$ qui donne $f = 10$, &c. La premiere valeur 5 de f ſubſtituée dans la ſixieme expreſſion $x = 6f + 1$, donne la ſolution des trois premieres équations; mais elle ne donne point la ſolution de la quatrieme $\frac{x}{11}$. Car $31 = x$ ne peut être exactement diviſé par 11.

Je fais donc $f = 5g$, que je mets à la place de f dans la ſixieme équation $x = f + 1$, ce qui donne $7x = 30g + 1$, que je ſubſtitue dans la quatrieme équation $\frac{x}{11}$, & j'ai $\frac{30g+1}{11}$. J'ôte $30g + 1$ de $33g$ multiple de $11g$, il reſte $3g - 1$. J'ôte $3g - 1$, ou ſon multiple $9g + 3$, de $11g$, puis le reſte $2g + 3$ de $3g - 1$, je trouve pour dernier reſte $g - 4$. Faiſant $\frac{g-4}{11} = 0$, on a $g = 4$, qui donne la ſolution de la ſeptieme équation $x = 30g + 1 = 121$, qui convient aux quatre équations propoſées.

PROBLEME XXVIII.

Diviſer pluſieurs nombres donnés chacun en deux parties, & trouver deux nombres, en ſorte que multipliant la premiere partie de chacun des nombres donnés par le premier nombre trouvé, & la ſeconde par le ſecond, la ſomme des deux produits ſoit par-tout la même.

SI on donne, par exemple, ces trois nombres 10, 25, 30, & qu'on veuille avoir une ſolution en nombres entiers, prenez pour les deux nombres qu'on cherche, deux nombres quelconques, pourvu que leur différence ſoit 1, ou telle qu'elle puiſſe diviſer exactement le produit ſous le plus grand de ces deux nombres, & la différence de deux quelconques des trois nombres donnés, & que le plus grand de ces deux nombres, multiplié par le plus petit nombre donné 10, ſurpaſſe le plus petit des deux mêmes nombres, multiplié par le plus grand nombre donné 30.

Choiſiſſez, par exemple, 2 & 7; leur différence 5, meſure exactement 105, produit de 7, grand nombre choiſi, & de 15, différence de 25 & de 10. De plus, 70 produit de 7, grand nombre choiſi, par 10, le plus petit nombre donné, ſurpaſſe 60, produit du plus grand nombre donné, par 2, petit nombre choiſi.

Ayant donc trouvé les deux nombres qu'on cherche, 2, 7, la premiere partie du premier nombre donné 10, ſe pourra prendre à volonté, pourvu qu'elle ſoit moindre que le nombre donné 10, & que le nombre 10, qui reſte en ôtant 60, produit de 2, petit nombre trouvé, par le plus grand donné

30 de 70, produit de 7, grand nombre trouvé, par le plus petit nombre donné 10. Cette premiere partie doit être auſſi moindre que 2, quotient de ce reſte 10, diviſé par 5, différence des deux nombres choiſis 2, 7. Elle ſera donc 1, que l'on ôtera du premier nombre donné 10; le reſte 9 ſera l'autre partie, laquelle étant multipliée par le ſecond nombre trouvé 7, & la premiere 1 étant multipliée par le premier nombre trouvé 2, la ſomme des deux produits 63, 2, eſt 65.

Pour trouver la premiere partie du ſecond nombre donné, 25, multipliez la différence 15 des deux premiers nombres donnés 10, 25, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant diviſé le produit 105, par la différence 5, des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 21 à la premiere partie trouvée 1, du premier nombre donné 10, & la ſomme 22 ſera la premiere partie du ſecond nombre donné 25; c'eſt pourquoi l'autre partie ſera 3, laquelle étant multipliée par le ſecond nombre trouvé 7, & la premiere 22, par le premier 2, la ſomme des deux produits 21, 44, fait auſſi 65.

Enfin pour trouver la premiere partie du troiſieme nombre donné 30, multipliez la différence 5 des deux derniers nombres donnés 25, 30, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant diviſé le produit 35, par la différence 5 des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 7, à la premiere partie 22 du ſecond nombre donné 30, & la ſomme 29 ſera la premiere partie du troiſieme nombre donné 30: c'eſt pourquoi l'autre partie ſera 2, laquelle étant multipliée par le ſecond nombre trouvé 7, & la premiere 29, par le premier 2, la ſomme des deux produits 7, 58, fait auſſi 65.

Ou bien multipliez la différence 20 du premier & du troiſieme nombre donné, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant diviſé le produit 140 par la différence 5 des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 28 à la premiere partie 1, du premier nombre donné 10, & vous aurez 29, comme auparavant, pour la premiere partie du troiſieme nombre donné 30.

Si l'on prend 1, 6, pour les deux nombres qu'on cherche, & 4 pour la premiere partie du premier nombre donné 10, auquel cas l'autre partie ſera 6, qui étant multiplié par le ſecond nombre trouvé 6, & la premiere 4, par le premier 1, la ſomme des deux produits 36, 4, eſt 40; la premiere partie du ſecond nombre donné 25, ſera 22, & l'autre partie par conſéquent ſera 3, qui étant multipliée par le ſecond nombre trouvé 6, & la premiere 22, par le premier 1, la ſomme des deux produits 18, 22, eſt auſſi 40; enfin la premiere partie du troiſieme nombre donné 30 ſera 28; ce qui fait que l'autre partie ſera 2, qui étant multipliée par le ſecond nombre trouvé 6, & la premiere 28 par le premier 1, la ſomme des deux produits 12, 28, eſt auſſi 40. Ce problême ſert à réſoudre la queſtion ſuivante.

QUESTION I.

Une femme a vendu 10 pommes au marché à un certain prix, une autre femme en a vendu 25 au même prix, & une troiſieme femme en a vendu 30 auſſi au même prix, & chacune a rapporté une même ſomme d'argent. On demande comment cela ſe peut faire.

IL eſt évident qu'afin que la queſtion ſoit poſſible, il faut que les femmes vendent leurs pom-

mes à deux diverſes fois, & à divers prix, bien qu'à chaque fois elles vendent chacune à un même prix. Si ces deux prix différens ſont 2, 7, qui ſont

	Pom.		*Den.*	*Pom.*		*Den.*	
10.	1	à	2	9	à	7	}
25.	22	à	2	3	à	7	} 65
30.	29	à	2	1	à	7	}

les deux nombres que nous avons trouvés au problême précédent; & ſi l'on ſuppoſe que la premiere fois elles vendent 2 deniers la pomme, & qu'à ce prix, la premiere vende 1 pomme, la ſeconde 22, & la troiſieme 29, les trois nombres 1, 22, 29, ſeront les premieres parties des trois nombres donnés, 10, 25, 30, comme elles ont été trouvées au problême précédent. Dans ce cas la premiere femme aura 2 deniers, la ſeconde en aura 44, & la troiſieme en aura 58. Enſuite, ſi on ſuppoſe qu'elles vendent le reſte de leurs pommes 7 deniers la pomme, alors la premiere femme aura 63 deniers pour neuf pommes qui lui reſtent, la ſeconde aura 21 deniers pour trois pommes qui lui reſtent, & la troiſieme aura 7 deniers pour 1 pomme qui lui reſte; de ſorte que chacune aura en tout 65 deniers.

Ou bien ſi les deux prix différens ſont 1, 6, qui ſont deux autres nombres que nous avons trouvés au problême précédent, & ſi l'on ſuppoſe que la premiere fois elles vendent 1 denier la pomme, & qu'à ce prix la premiere vende 4 pommes, la ſeconde 22, & la troiſieme 28, ces trois nombres 4, 22, 28, ſeront les premieres parties des trois nombres donnés 10, 25, 30, comme elles ont été trouvées au problême précédent. Dans ce cas la

premiere femme aura 4 deniers, la ſeconde en aura

Pom.	*Den.*		*Pom.*	*Den.*		
10.	4	à 1	6	à 6	}	
25.	22	à 1	3	à 6	}	40
30.	28	à 1	2	à 6	}	

22, & la troiſieme en aura 28. Enſuite ſi on ſuppoſe qu'elles vendent le reſte de leurs pommes 6 deniers la pomme, alors la premiere femme aura 36 deniers pour 6 pommes qui lui reſtent, la ſeconde aura 18 deniers pour 3 pommes qui lui reſtent, & la troiſieme aura 12 deniers pour 2 pommes qui lui reſtent; de ſorte que chacune aura en tout 40 deniers.

REMARQUES.

I.

Ceux qui voudront être inſtruits plus à fond ſur la ſolution de ces ſortes de queſtions, pourront conſulter ce qui en eſt dit dans la ſeconde partie de l'arithmétique univerſelle, p. 456. On y traite en particulier celle qui eſt ici propoſée; on dit qu'elle a ſeulement 6 ſolutions, & que la plus grande ſomme eſt 65. Je vais entreprendre de la réſoudre par l'algebre, pour faire voir la fécondité de l'analyſe, qui renferme des richeſſes qu'on tire de ſon ſein, quand on eſt aſſez heureux pour la traiter avec ménagement. Je rapporterai dix ſolutions différentes de cette même queſtion; les ſommes de chaque femme ſeront, après chacune des dix ventes, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70. J'eſpere que cela fera plaiſir à ceux qui commencent à apprendre l'algebre, & je crois que ce ſera pour eux une récréation.

II.

Il faut ſe ſouvenir que trois femmes ayant porté des pommes au marché, l'une en a vendu 10, l'autre 25, & la troiſieme 30, à un même prix; & qu'étant revenues du marché, elles ont rapporté toutes trois une même ſomme. On ſe ſouviendra encore qu'elle doivent avoir vendu à deux différentes repriſes, & à divers prix chaque fois.

J'appelle u le prix auquel les trois femmes ont vendu leurs pommes dans la premiere vente, & p le prix auquel elles ont vendu le reſte dans la ſeconde vente.

Je nomme x le nombre des pommes de la premiere femme, vendues au prix u; par conſéquent le reſte de ſes pommes vendues dans la ſeconde vente au prix p, ſera $10-x$. Ainſi l'argent de la premiere vente ſera xu, & celui de la ſeconde vente ſera $10p-px$: la ſomme eſt $xu+10p-px$.

Je nomme z le nombre des pommes vendues au prix u par la ſeconde femme: par conſéquent le reſte de ſes pommes vendues dans la ſeconde vente au prix p, ſera $25-z$. Ainſi l'argent de la premiere vente ſera zu, & celui de la ſeconde vente ſera $25p-pz$: la ſomme eſt $zu+25p-pz$.

Enfin je nomme y le nombre des pommes vendues par la troiſieme femme au prix u; par conſéquent le reſte de ſes pommes vendues dans la ſeconde vente au prix p, ſera $30-y$. Ainſi l'argent de la premiere vente ſera yu, & celui de la ſeconde vente ſera $30p-py$: la ſomme de cette troiſieme femme eſt $yu+30p-py$.

Je raſſemblerai dans cette table tous ces différens prix: ceux qui ſont à gauche marquent les prix des pommes vendues par les trois femmes

dans la premiere vente, & ceux qui ſont à droite marquent les prix des pommes vendues dans la ſeconde vente.

	1e vente.	2e vente.
1e femme.	xu	$10p-px$
2e femme.	zu	$25p-pz$
3e femme.	yu	$30p-py$

La ſomme que rapporte la premiere femme eſt $xu+10p-px$.

La ſomme que rapporte la ſeconde femme eſt $zu+25p-pz$.

La ſomme que rapporte la troiſieme femme eſt $yu+30p-py$.

Ces 3 ſommes doivent être égales, c'eſt-à-dire, que $xu+10p-px=zu+25p-pz=yu+30p-py$. D'où je tire ces équations, 1°. en comparant les deux 1res ſommes $xu+10p-px=zu+25p-pz$; d'où l'on a $xu-px=zu-pz+15p$, & diviſant tout par $u-p$, on trouve $x=z+\frac{15p}{u-p}$. 2° En comparant la premiere & la troiſieme ſomme $xu+10p-px=yu+30p-py$, d'où l'on a $xu-px=yu-py+20p$, & diviſant encore tout par $u-p$, on a $x=y+\frac{20p}{u-p}$. 3°. En comparant la ſeconde & la troiſieme ſomme $zu+25p-pz=yu+30p-py$, d'où l'on a $zu-pz=yu-py+5p$, & diviſant tout par $u-p$, on a $z=y+\frac{5p}{u-p}$.

On voit dans ces trois équations que la différence de u à p $(u-p)$ doit être un diviſeur exact de 15, de 20, & de 5, c'eſt-à-dire, des différences des nombres des pommes portées au marché. Mais pour parvenir avec quelque certitude à la valeur

Cinquieme ſolution.

Je ſuppoſe $y=4$. donc $z=5$, & $x=8$, $u=6$. $p=1$.

Sommes. $\begin{cases} 1^{e}. \text{ Fem. } xu+10p-px=48+10-8=50. \\ 2^{e}. \text{ Fem. } zu+25p-pz=30+25-5=50. \\ 3^{e}. \text{ Fem. } yu+30p-py=24+30-4=50. \end{cases}$

Sixieme ſolution.

Je ſuppoſe $y=5$, par conſéquent $z=6$, & $x=9$. $u=6$. $p=1$.

Sommes. $\begin{cases} 1^{e}. \text{ Fem. } xu+10p-px=54+10-9=55. \\ 2^{e}. \text{ Fem. } zu+25p-pz=36+25-6=55. \\ 3^{e}. \text{ Fem. } yu+30p-py=30+30-5=55. \end{cases}$

Septieme ſolution.

Je ſuppoſe $y=6$, donc $z=7$, & $x=10$. $u=6$. $p=1$.

Sommes. $\begin{cases} 1^{e}. \text{ Fem. } xu+10p-px=60+10-10=60. \\ 2^{e}. \text{ Fem. } zu+25p-pz=42+25-7=60. \\ 3^{e}. \text{ Fem. } yu+30p-py=36+30-6=60. \end{cases}$

On voit par cette ſolution que la premiere femme vend toutes ſes pommes dans la premiere vente.

III.

Je ne puis plus ſuppoſer une plus grande valeur à y, parce qu'il en viendroit à x une qui ſeroit plus grande que 10, c'eſt-à dire, que la premiere femme ſeroit obligée de vendre plus de pommes qu'elles

qu'elle n'a ; ce qui eſt contre la ſuppoſition. D'où il ſuit qu'il faut chercher à u & à p une autre valeur que celle qu'on leur a donnée dans les ſolutions précédentes. Ainſi je fais $\frac{5p}{u-p} = 2$, d'où il vient $5p = 2u - 2p$, ou $7p = 2u$; faiſant $p = 2$, on aura $u = 7$. Ces valeurs trouvées, on les ſubſtituera dans les comparaiſons $x = z + \frac{15p}{u-p}$. $x = y + \frac{10p}{u-p}$. $z = y + \frac{5p}{u-p}$, & l'on aura, 1°, $x = z + 6$. 2°. $x = y + 8$. 3°. $z = y - 2$.

Huitieme ſolution.

Je ſuppoſe $y = 0$, donc $z = 2$ & $x = 8$ (par les équations précédentes).

$u = 7$. $p = 2$.

Sommes. $\begin{cases} 1^e \text{ Fem. } xu + 10p - px = 56 + 20 - 16 = 60. \\ 2^e \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 14 + 50 - 4 = 60. \\ 3^e \text{ Fem. } yu + 30p - py = 0 + 60 - 0 = 60. \end{cases}$

L'argent que chaque femme rapporte dans cette ſolution, eſt le même que dans la précédente : cependant ces deux ſolutions ſont fort différentes l'une de l'autre, comme il eſt aiſé de connoître ſi l'on y fait quelque attention.

Neuvieme ſolution.

Je ſuppoſe $y = 1$, par conſéquent $z = 3$, & $x = 9$. (ſelon les équations dernieres.)

$u = 7$. $p = 2$.

Sommes. $\begin{cases} 1^e \text{ Fem. } xu + 10p - px = 63 + 20 - 18 = 65. \\ 2^e \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 21 + 50 - 6 = 65. \\ 3^e \text{ Fem. } yu + 30p - py = 7 + 60 - 2 = 65. \end{cases}$

Cette neuvieme ſolution fait connoître que la premiere femme a vendu 9 pommes à 7 deniers, dans la premiere vente, & une à 2 deniers dans la deuxieme vente : que la ſeconde femme a vendu 3 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 22 à deux deniers dans la deuxieme vente : que la troiſieme femme a vendu 1 pomme à 7 deniers dans la premiere vente, & 29 à 2 deniers dans la deuxieme vente ; d'où il ſuit que chacune a rapporté 65 deniers.

Dixieme ſolution.

Je ſuppoſe enfin $y=2$, donc $z=4$ & $x=10$. (dernieres équations).

$u=7$. $p=2$.

Sommes. $\begin{cases} 1^{e} \text{ Fem. } xu+10p-px=70+20-20=70. \\ 2^{e} \text{ Fem. } zu+25p-pz=28+50-8=70. \\ 3^{e} \text{ Fem. } yu+30p-py=14+60-4=70. \end{cases}$

Enfin cette derniere ſolution montre que la premiere femme a vendu les 10 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, mais elle n'en a point vendu dans la deuxieme ; que la ſeconde femme a vendu 4 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 21 à 2 deniers dans la ſeconde vente ; que la troiſieme femme a vendu 2 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 28 à 2 deniers dans la deuxieme vente. D'où il ſuit que chacune a rapporté 70 deniers du marché.

QUESTION. II.

Un chef de cuiſine a une certaine quantité d'œufs. Trois de ſes aides lui en demandent. Il en donne au premier la moitié de ce qu'il a, & la moitié d'un œuf; au ſecond la moitié de ce qui lui reſte & la moitié d'un œuf : enfin il donne au dernier la moitié de ce qui lui reſte & la moitié d'un œuf. On demande combien ce chef de cuiſine avoit d'œufs & comment il a pu faire pour en donner des moitiés ſans en caſſer.

LA ſolution de cette queſtion paroît impoſſible d'abord, à cauſe des moitiés d'œufs qu'il faut donner : cependant on verra bientôt que cette queſtion a des ſolutions à l'infini. Pour trouver le plus petit nombre d'œufs que puiſſe avoir le chef de cuiſine, prenez la troiſieme puiſſance de 2, qui eſt 8; diminuez ce 8 de l'unité, & le nombre 7 ſera le plus petit nombre qu'on cherche : car ce chef de cuiſine ayant donné au premier aide quatre œufs, il lui en a donné la moitié de ce qu'il avoit, avec la moitié d'un œuf, & il lui eſt reſté trois œufs. Ayant donné au ſecond aide de cuiſine deux œufs, il lui a donné la moitié de ce premier reſte, avec la moitié d'un œuf, & il lui eſt reſté un œuf. Enfin ayant donné au troiſieme aide un œuf, il lui a donné la moitié de ce deuxieme reſte, avec la moitié d'un œuf. Dans ce cas il n'eſt point reſté d'œuf au chef de cuiſine.

Si on veut de plus grands nombres que 7, il faut multiplier ſéparément le cube 8 par les nombres 2, 3, 4, 5, &c. ſelon leur ſuite naturelle, diminuer le produit de l'unité, & l'on aura autant

de nombres qu'on voudra à l'infini, qui ſatisferont à la queſtion.

Obſervations.

J'ai dit qu'il falloit prendre la troiſieme puiſſance de deux, parce qu'il n'y a que trois aides; mais s'il y en avoit quatre, il faudroit prendre la quatrieme puiſſance, qui eſt 16, & la diminuer de l'unité: s'il y en avoit cinq, il faudroit prendre la cinquieme puiſſance de 2, qui eſt 32, & la diminuer de l'unité, & ainſi des autres. Pour avoir pluſieurs nombres qui ſatisfaſſent à la queſtion, il faut multiplier ces puiſſances par quelque nombre pris à volonté, & ôter l'unité du produit.

QUESTION III.

Une femme de la campagne a porté au marché des œufs, des fromages & des choux; elle a vendu les œufs 2 deniers, les fromages 6 deniers, & les choux 4 deniers: elle rapporte 10 ſols. Combien avoit-elle d'œufs, combien de fromages, combien de choux?

ELle pouvoit avoir ſept œufs, quinze fromages & quatre choux.

PROBLEME XXIX.

Pluſieurs nombres pris ſuivant leur ſuite naturelle, 1, 2, 3, 4, &c. étant diſpoſés en rond, deviner celui que quelqu'un aura penſé.

Pl. 1, fig. 2. ON ſe ſervira commodément des dix premieres cartes d'un jeu entier, pour exécuter ce problême. On les diſpoſera en rond, comme vous

voyez les dix premiers nombres dans la figure. l'as ſera repréſenté par la lettre A jointe à 1, & le dix ſera repréſenté par la lettre K jointe à 10.

Ayant fait toucher un nombre, ou une carte telle que voudra celui qui en aura penſé une, ajoutez au nombre de cette carte touchée le nombre des cartes que l'on aura choiſies, comme 10, dans cet exemple : puis faites compter la ſomme que vous aurez à celui qui a penſé la carte, par un ordre contraire à la ſuite naturelle des nombres, en commençant par la carte qu'il aura touchée, & en attribuant à cette carte le nombre de celle qu'il aura penſé ; car en comptant de la ſorte, il finira à compter cette ſomme ſur le nombre ou ſur la carte qu'il aura penſé, & vous fera par conſéquent connoître cette carte.

Comme ſi l'on a penſé 3 marqué par la lettre C, & qu'on ait touché 6 marqué par la lettre F; ajoutez 10 à ce nombre 6, vous aurez la ſomme 16, puis faites compter * cette ſomme 16 depuis le nombre touché F vers E, D, C, B, A, & ainſi de ſuite par un ordre rétrograde ; en ſorte que l'on commence à compter le nombre penſé 3 ſur F, 4 ſur E, 5 ſur D, 6 ſur C, & ainſi de ſuite juſqu'à 16; ce nombre 16 ſe terminera en C, & fera connoître qu'on a penſé 3, qui répond à C.

REMARQUES.

I.

On peut prendre un plus grand ou un plus petit nombre de cartes, ſelon qu'on le jugera à propos. S'il y avoit 15 ou 8 cartes, il faudroit ajouter 15 ou 8 au nombre de la carte touchée.

* Obſervez qu'on ne doit pas compter cette ſomme tout haut, mais en ſoi-même, & ſeulement par penſée.

II.

Pour mieux couvrir l'artifice, il faut renverſer les cartes, en ſorte que les points ſoient cachés, & bien retenir la ſuite naturelle des cartes, & en quel endroit eſt le premier nombre, ou l'as, afin de ſçavoir le nombre de la carte touchée, pour trouver celui juſqu'où il faut faire compter.

PROBLEME XXX.

Ayant fait prendre à trois perſonnes un nombre de jettons, ou de cartes à certaines conditions, deviner combien chacune en aura pris.

FAites prendre au troiſieme un nombre de jettons ou de cartes, tel qu'il voudra, pourvu qu'il ſoit pairement pair, c'eſt-à-dire, diviſible par 4, puis faites prendre au ſecond autant de fois 7 que le premier aura pris de fois 4, & au premier autant de fois 13. Après cela dites au premier de donner de ſes jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun, & au ſecond de donner de ſes jettons auſſi aux deux autres autant qu'ils en auront chacun; & enfin au troiſieme de donner auſſi de ſes jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun, il arrivera alors qu'ils auront chacun autant de jettons l'un que l'autre, & le nombre de chacun ſera double de celui que le troiſieme a pris au commencement. C'eſt pourquoi ſi vous demandez à l'une de ces trois perſonnes le nombre de ſes jettons, la moitié de ce nombre ſera le nombre des cartes ou des jettons que le troiſieme avoit au commencement; & ſi vous pre-

nez autant de fois 7, & autant de fois 13 qu'il y aura de fois 4 dans le nombre du troiſieme, vous aurez le nombre des cartes & des jettons que le ſecond & le premier avoient pris.

Comme ſi le troiſieme prend 8 cartes, le ſecond en doit prendre 14, ſçavoir, deux fois 7, parce que dans 8 il y a deux fois 4, & le premier en doit prendre 26, ſçavoir, deux fois 13, par la même raiſon. Si le premier, qui a 26 cartes, en donne 14 au ſecond, qui en a auſſi 14, & 8 au premier qui en a auſſi 8, il lui en reſtera ſeulement 4, le ſecond en aura 28, & le troiſieme 16. Mais ſi le ſecond, qui a 28 cartes, en donne 4 au premier qui en a auſſi 4, & 16 au troiſieme, qui en a auſſi 16, il lui en reſtera 8, & le premier en aura 8, & le troiſieme 32. Enfin ſi le troiſieme, qui a 32 cartes, en donne 8 à chacun des deux autres, qui en ont chacun 8, ils en auront chacun 16, qui eſt le double du nombre 8 des cartes que le premier a pris au commencement, &c.

1e.	2e.	3e.
26	14	8
4	28	16
8	8	32
16	16	16

PROBLEME XXXI.

De trois cartes inconnues, deviner celle que chacune des trois perſonnes aura priſe.

IL ne faut pas que le nombre des points de chacune des trois cartes, qui aura été priſe, ſurpaſſe 9; & alors pour trouver ce nombre, dites à la premiere perſonne d'ôter 1 du double du nombre des points de ſa carte, & qu'après avoir multiplié le reſte par 5, elle ajoute au produit le nombre des

points de la carte que la ſeconde perſonne aura priſe. Après cela faites ajouter 5 à cette ſomme, pour avoir une ſeconde ſomme, & ayant fait ôter 1 du double de cette ſeconde ſomme, faites multiplier le reſte par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte que la troiſieme perſonne aura priſe. Enfin demandez la ſomme qui vient de cette derniere addition ; car ſi vous y ajoutez 5, vous aurez une autre ſomme compoſée de trois figures, dont la premiere vers la gauche ſera le nombre des points de la carte que la premiere perſonne aura priſe, celle du milieu ſera le nombre des points de la carte de la ſeconde perſonne, & la derniere vers la droite fera connoître la carte de la troiſieme perſonne.

Comme ſi le premier a pris un 3, le ſecond un 4, & le troiſieme un 7 ; en ôtant 1 du double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier, & en multipliant le reſte 5 par 5, on a 25, auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du ſecond, on a cette ſomme 29, à laquelle ſi on ajoute 5, on a cette ſeconde ſomme 34, dont le double eſt 68, d'où ôtant 1, il reſte 67, qui étant multiplié par 5, donne 335, auquel ajoutant le nombre 7 des points de la carte du troiſieme, & 5 de plus, on a cette derniere ſomme 347, dont les trois figures repréſentent ſéparément les nombres des points de chaque carte.

Autrement.

Ayant dit au premier d'ajouter 1 au double du nombre des points de ſa carte, faites multiplier la ſomme par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte du ſecond ; puis ayant fait encore ajouter 1 au double de la ſomme précédente,

faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte du troiſieme. Après cela demandez la ſomme qui viendra de cette derniere addition, d'où vous ôterez 55, pour avoir au reſte un nombre qui ſera compoſé de trois figures, dont chacune repréſentera, comme auparavant, le nombre des points de chaque carte.

Comme, dans le même exemple, en ajoutant 1 au double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier, & en multipliant la ſomme 7 par 5, on a 35, auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du ſecond, on a 39, dont le double eſt 78, auquel ajoutant 1, & multipliant la ſomme 79 par 5, on a 395, auquel ajoutant le nombre 7 des points de la carte du troiſieme, on a 402, d'où ôtant 55, il reſte 347, dont les trois figures repréſentent en particulier le nombre des points de chaque carte.

PROBLEME XXXII.

Trois cartes ayant été préſentées à trois perſonnes, deviner celle que chacune aura priſe.

ON doit ſçavoir quelles cartes ont été préſentées, c'eſt pourquoi nous appellerons l'une A, l'autre B, & la troiſieme C. Mais on laiſſe la liberté aux trois perſonnes de choiſir en particulier telle carte qu'il leur plaira. Quand ce choix, qui peut ſe faire en ſix manieres différentes, ſera fait, donnez à la premiere perſonne ce nombre 12, à la ſeconde ce nombre 24, & à la troiſieme ce nombre 36. Après cela dites à la premiere perſonne d'ajouter enſemble la moitié du nombre de celle qui a pris la carte A, le tiers du nombre de

celle qui a pris la carte B, & le quart du nombre de celle qui a pris la carte C, & demandez-lui la

1e.	2e.	3e.	*Sommes.*
12	24	36	
A	B	C	23
A	C	B	24
B	A	C	25
C	A	B	27
B	C	A	28
C	B	A	29

ſomme qui ſera ou 23, ou 24, ou 25, ou 27, ou 28, ou 29, comme vous voyez dans cette table, qui montre que ſi cette ſomme eſt 25, par exemple, la premiere perſonne aura pris la carte B, la ſeconde la carte A, & la troiſieme la carte C; & que ſi cette ſomme eſt 28, la premiere perſonne aura pris la carte B, la deuxieme la carte C, & la troiſieme la carte A. Ainſi des autres.

PROBLEME XXXIII.

Deviner entre pluſieurs cartes, celle que quelqu'un aura penſé.

AYant pris à volonté dans un jeu de cartes, un certain nombre de cartes, montrez-les par ordre ſur une table à celui qui en veut penſer une, commencez par celle de deſſous, & mettez-les proprement l'une ſous l'autre; puis dites-lui de ſe ſouvenir du nombre qui exprime la quantieme qu'il aura penſée; ſçavoir, de 1, s'il a penſé la premiere; de 2, s'il a penſé la ſeconde; de 3, s'il a penſé la troiſieme, &c. Mais en même tems comptez

ſecretement celle que vous montrez, dont le nombre ſera, par exemple, 12; & ſéparez-les adroitement du reſte du jeu. Après cela mettez ces cartes, dont vous ſçavez le nombre, dans une ſituation contraire, en commençant à mettre ſur le reſte du jeu la carte qui aûra été miſe la premiere ſur la table, & en finiſſant par celle qui aura été montrée la derniere; enfin ayant demandé le nombre de la carte penſée, que nous ſuppoſerons être la quatrieme, remettez à découvert vos cartes ſur la table l'une après l'autre, en commençant par celle de deſſus, à laquelle vous attribuerez le nombre 4 de la carte penſée, en comptant 5 ſur la ſeconde carte ſuivante, & pareillement 6 ſur la troiſieme carte plus baſſe, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que vous ſoyez parvenu au nombre 12 des cartes que vous aviez priſes au commencement; car la carte ſur laquelle tombera ce nombre 12, ſera celle qui aura été penſée.

PROBLEME XXXIV.

Pluſieurs cartes différentes étant propoſées ſucceſſivement à autant de perſonnes, pour en retenir une dans ſa mémoire, deviner ce que chacun aura penſé.

S'Il y a, par exemple, trois perſonnes, montrez trois cartes à la premiere perſonne, pour en retenir une dans ſa penſée, & mettez à part ces trois cartes. Préſentez auſſi trois autres cartes à la ſeconde perſonne, pour en penſer une à ſa volonté, & mettez auſſi à part ces trois cartes. Enfin préſentez à la troiſieme perſonne trois autres cartes, pour lui faire penſer celle qu'il voudra,

& mettez pareillement à part ces trois dernieres cartes. Cela étant fait, diſpoſez à découvert les trois premieres cartes en trois rangs, & mettez deſſus les trois autres cartes, & deſſus celles-ci les trois dernieres, pour avoir ainſi toutes les cartes diſpoſées en trois rangs, dont chacun ſera compoſé de trois cartes. Après quoi il faut demander à chaque perſonne dans quel rang eſt la carte qu'il a penſée: alors il ſera facile de connoître cette carte, parce que la carte de la premiere perſonne ſera la premiere de ſon rang; de même la carte de la ſeconde perſonne ſera la ſeconde de ſon rang; enfin la carte de la troiſieme perſonne ſera la troiſieme de ſon rang.

PROBLEME XXXV.

Pluſieurs cartes étant diſpoſées également en trois rangs, deviner celle que quelqu'un aura penſé.

IL eſt évident que le nombre des cartes doit être diviſible par 3, afin qu'on en puiſſe faire trois rangs égaux. Suppoſant donc qu'il y ait, par exemple 36 cartes, dont chaque rang en comprendra par conſéquent 12, demandez en quel rang eſt la carte qu'on aura penſé, & ayant ramaſſé toutes les cartes, enſorte que le rang où ſera la carte penſée, ſoit entre les deux autres rangs; diſpoſez de nouveau ces 36 cartes en trois rangs égaux, en mettant la premiere au premier rang, la ſeconde au ſecond, la troiſieme au troiſieme, puis la quatrieme au premier rang, & pareillement la ſuivante au ſecond rang, en continuant ainſi juſqu'à ce que toutes les cartes ſoient rangées. Après quoi vous demanderez encore dans quel rang eſt la carte

penſée, & ayant ramaſſé de nouveau toutes les cartes, enſorte que le rang où ſera la carte penſée, ſoit auſſi entre les deux autres, vous ferez, comme auparavant, trois rangs égaux des mêmes cartes. Ayant enfin demandé dans quel rang eſt la carte penſée, vous connoîtrez aiſément cette carte, parce qu'elle ſe trouvera au milieu de ſon rang; ſçavoir, dans cet exemple, la ſixieme. Ou bien, pour mieux cacher l'artifice, elle ſe trouvera au milieu de toutes les cartes, ou la dix-huitieme, lorſqu'on les aura ramaſſées comme auparavant; mais il faut faire enſorte que le rang où ſera la carte penſée, ſoit toujours entre les deux autres.

PROBLEME XXXVI.

Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tirée d'un jeu de carte.

AYant pris un jeu entier de 52 cartes, préſentez-le à quelqu'un de la compagnie, qui tirera celle qu'il lui plaira, ſans vous la montrer. Enſuite faiſant valoir toutes les cartes ſelon leur valeur marquée, vous ferez valoir le valet 11, la dame 12, & le roi 13; puis comptant les points de toutes les cartes, vous ajouterez les points de la premiere carte aux points de la ſeconde, ceux-ci aux points de la troiſieme, & ainſi de ſuite, vous rejetterez tous les 13, & garderez le reſte pour l'ajouter à la carte ſuivante. On voit qu'il eſt inutile de compter les rois, qui valent 13. Enfin s'il reſte quelques points à la derniere carte, vous ôterez ces points de 13, & le reſte marquera les points de la carte qu'on aura tirée : enſorte que ſi le reſte eſt 11, ce ſera un valet qu'on aura tiré; ſi

le reſte eſt 12, ce ſera une dame, &c. mais s'il ne reſte rien, on aura tiré un roi. Vous connoîtrez quel eſt ce roi, en regardant celui qui manque dans les cartes que vous avez.

Si l'on veut ſe ſervir d'un jeu compoſé ſeulement de 32 cartes, dont on ſe ſert à préſent pour jouer au piquet, on ajoutera tous les points des cartes, comme on vient de dire, mais on rejettera tous les 10 qui ſe trouveront en faiſant cette addition. Enfin on ajoutera 4 au point de la derniere carte pour avoir une ſomme, laquelle étant ôtée de 10, ſi elle eſt moindre, ou de 20, ſi elle ſurpaſſe 10, le reſte ſera le nombre de la carte qu'on aura tirée; de ſorte que s'il reſte 2, ce ſera un valet; s'il reſte 3, ce ſera une dame; & ſi le reſte eſt 4, on aura tiré un roi, &c.

Si le jeu de cartes eſt imparfait, on doit prendre garde aux cartes qui manquent, & ajouter à la derniere ſomme le nombre des points de toutes ces cartes qui manquent, après qu'on aura ôté de ce nombre autant de fois 10 qu'il ſera poſſible: & la ſomme qui viendra de cette addition, doit être, comme auparavant, ôtée de 10, ou de 20, ſelon qu'elle ſera au-deſſous, ou au-deſſus de 10. Il eſt évident que ſi l'on regarde encore une fois les cartes, on pourra nommer celle qui aura été tirée.

PROBLEME XXXVII.

Deviner le nombre de tous les points qui ſont en deux cartes qu'on aura tirées d'un jeu de cartes entier.

DItes à celui qui aura tiré à l'aventure deux cartes du jeu compoſé de 52 cartes, d'ajouter

à chacune des ſes cartes, autant d'autres cartes que le nombre des ſes points ſera au-deſſous de 25, qui eſt la moitié de toutes les cartes, diminué de l'unité, en donnant à chaque carte figurée tel nombre qu'on voudra. Comme ſi la premiere carte eſt un dix, on y ajoutera 15 cartes, & ſi la ſeconde carte eſt un ſept, on y ajoutera 18 cartes; ce qui ſera en tout 33 cartes : de ſorte que dans cet exemple il reſtera 17 cartes de tout le jeu. Prenant donc les cartes qui reſtent du jeu, & trouvant qu'il en reſte 17, ce nombre 17 ſera le nombre de tous les points pris enſemble des deux cartes qu'on aura tirées.

Pour mieux cacher l'artifice, il ne faut point toucher aux cartes; mais il faut faire ôter le nombre des points de chacune des deux cartes qui ont été priſes, de 26, qui eſt la moitié du nombre de toutes les cartes, & faire ajouter enſemble les deux reſtes, pour avoir leur ſomme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes, c'eſt-à-dire, de 52; car le nombre qui reſtera, ſera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple, où l'on ſuppoſe qu'on a pris un dix & un ſept, en ôtant 10 de 26, il reſte 16 & en ôtant 7 de 26, il reſte 19, & en ajoutant enſemble les deux reſtes 16, 19, on a 35 pour leur ſomme, laquelle étant ôtée de 52, il reſte 17 pour le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées.

On fera la même choſe avec un jeu de piquet, compoſé de 36 cartes, ou ſeulement de 32 cartes.

Mais pour cacher encore mieux l'artifice, au lieu de la moitié 26 de toutes les cartes, quand il y en a 52, prenez un autre nombre moindre, mais plus grand que 10, comme 24, duquel ôtant 10 &

7, il reſte 14 & 17, dont la ſomme 31 étant ôtée de la ſomme 52 de toutes les cartes, il reſte 21, d'où vous ôterez encore 4, qui eſt le double de l'excès de 26 ſur 24, pour avoir au reſte 17 le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées; ſçavoir, du dix & du ſept.

Quand on ſe ſervira d'un jeu de piquet, compoſé de 36 cartes, au lieu de la moitié 18 du nombre 36 de toutes les cartes, on prendra pareillement un nombre moindre, comme 16, duquel ôtant 10 & 7, il reſte 6 & 9, dont la ſomme 15 étant ôtée du nombre 36 de toutes les cartes, il reſte 21, d'où vous ôterez encore 4, qui eſt le double de l'excès de 18 ſur 16, pour avoir au reſte 17, le nombre des points des deux cartes qui ont été tirées.

Pareillement, ſi le jeu de piquet n'eſt que de 32 cartes, au lieu de la moitié 16 du nombre 32 de toutes les cartes, on prendra un nombre moindre tel que l'on voudra, pourvu qu'il ſoit plus grand que 10, comme 14, duquel ôtant 10 & 7, il reſte 4 & 7, dont la ſomme 11 étant ôtée de 32, il reſte 21, d'où il faut encore ôter 4, qui eſt le double de l'excès de 16 ſur 14, pour avoir au reſte 17, le nombre des points du dix & du ſept qu'on a tiré.

PROBLEME XXXVIII.

Deviner le nombre de tous les points qui ſont en trois cartes, qu'on aura tiré à volonté d'un jeu de cartes.

I.

POur réſoudre ce problême comme le précédent, en ſuivant la voie la plus courte, il faut que le nombre des cartes dont le jeu eſt compoſé, ſoit

soit divisible par 3 ; ainsi le jeu de 52 cartes, & celui de 32 cartes ne sont pas si convenables : celui de 36 cartes convient mieux, parce que 36 a pour troisieme partie 12, qui nous servira pour résoudre la question en cette sorte.

Dites à celui qui aura tiré à volonté trois cartes d'un jeu de piquet, composé de 36 cartes, d'ajouter à chacune de ces cartes, autant d'autres cartes que le nombre de ses points sera au-dessous de 11, qui est le tiers du nombre de toutes les cartes, diminué de l'unité, en donnant, comme dans le problême précédent, à chaque carte figurée, tel nombre qu'on voudra. Comme si la premiere carte est un neuf, on y ajoutera 2 cartes; si la seconde carte est un sept, on y ajoutera 4 cartes, & si la troisieme carte est un six, on y ajoutera 5 cartes, ce qui fait en tout 14 cartes qu'on a tiré du jeu; de sorte que dans cet exemple il restera 22 cartes de tout le jeu. Prenant donc les cartes qui restent du jeu, & trouvant qu'il en reste 22, ce nombe 22 fera connoître le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura tirées.

Ou bien sans toucher aux cartes, & pour mieux cacher l'artifice, faites ôter de 12, qui est le tiers du nombre 36 de toutes les cartes, le nombre des points de chacune des trois cartes qu'on a prises, & faites ajouter ensemble les trois restes, pour avoir leur somme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes, c'est-à-dire, de 36; car le nombre qui restera, sera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple, où l'on a supposé qu'on a pris un neuf, un sept & un six, ôtant 9 de 12, il reste 3; ôtant 7 de 12, il reste 5; enfin ôtant 6 de 12, il reste 6, & ajoutant ensemble les

trois reſtes 3, 5, 6, on a 14 pour leur ſomme, laquelle étant ôtée de 36, il reſte 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été tirées.

II.

Pour mieux encore cacher l'artifice, & pour appliquer la regle à un jeu de plus ou de moins de 36 cartes, comme de 52 cartes, ſervez-vous d'un nombre plus grand que 10, & moindre que 17, tiers de 52, par exemple, de 15 : & dites à celui qui aura tiré les trois cartes, d'ajouter à chacune de ſes cartes autant d'autres cartes que le nombre de ſes points ſera au-deſſous de 15; comme ſi la premiere carte eſt un neuf, on y ajoutera 6 cartes, ſi la ſeconde carte eſt un ſept, on y ajoutera 8 cartes, & ſi la troiſieme carte eſt un ſix, on y ajoutera 9 cartes, ce qui ſera en tout 26 cartes; de ſorte que dans cet exemple, il reſtera de tout le jeu 26 cartes. Prenant donc les cartes qui reſtent du jeu, & trouvant qu'il en reſte 26, ôtez de 26 le nombre 4, qui eſt l'excès de 52, nombre de toutes les cartes ſur le triple de 15, augmenté de 3, c'eſt-à-dire, ſur 48, & le reſte 22 ſera le nombre de tous les points des trois cartes qui auront été tirées du jeu.

Ou bien ſans toucher aux cartes, faites ôter le nombre des points de chacune des trois cartes qui auront été priſes, de 16, qui ſurpaſſe de l'unité le premier nombre 15, & faites ajouter enſemble tous les reſtes, pour avoir leur ſomme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre précédent 48; car le reſte ſera le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura priſes.

Comme dans cet exemple, où l'on ſuppoſe qu'on a pris un neuf, un ſept & un ſix, en ôtant

9 de 16, il reſte 7 ; ôtant 7 de 16, il reſte 9 ; enfin ôtant 6 de 16, il reſte 10, & ajoutant enſemble les trois reſtes 7, 9, 10, on a 26 pour leur ſomme, laquelle étant ôtée de 48, il reſte 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été priſes.

Mais ſi vous voulez vous ſervir d'un jeu compoſé de 36 cartes, & prendre un nombre plus grand que 10, comme 15, après avoir ajouté les cartes, qui ſeront au nombre de 26, comme vous avez vu, ôtez 26 de 36, nombre de toutes les cartes, ajoutez au reſte 10 ce nombre 12, qui eſt l'excès du triple de 15, augmenté de 3, c'eſt-à-dire, de 48, ſur le nombre 36 de toutes les cartes, & la ſomme 22 ſera le nombre des points qu'on cherche. Au lieu de 12, il faut ajouter 16, pour un jeu de piquet de 32 cartes, parce qu'ôtant 32 de 48, il reſte 16.

III.

A l'imitation de ce problême & du précédent, il ſera aiſé de réſoudre la queſtion pour quatre cartes qu'on aura tirées, & pour un plus grand nombre.

REMARQUES.

De quelque maniere qu'on exécute ce problême, ſoit avec un jeu entier de cartes, ou avec un jeu qui ne ſoit point entier, ſoit qu'on tire du jeu trois cartes ou davantage, ſoit enfin qu'après avoir tiré du jeu un certain nombre de cartes, on faſſe accomplir 15, ou quelqu'autre nombre, comme 14, 13, 16, &c. ſelon ce qui a été dit dans l'article II. Voici la regle générale qu'on doit ſuivre.

Multipliez le nombre que vous faites accomplir par le nombre des cartes choiſies ; ajoutez au

produit ce même nombre des cartes choiſies, & ôtez cette ſomme du nombre des cartes du jeu dont on ſe ſera ſervi, comme de 52, ſi le jeu eſt entier, ou de 36, s'il n'eſt point entier, &c. le reſte ſera le nombre qu'il faudra ôter des cartes qui ſeront reſtées de tout le jeu. Le nombre des cartes reſtées après cette derniere ſouſtraction exprimera le nombre des points des cartes choiſies.

Exemple.

Suppoſé qu'on ait choiſi dans un jeu entier 4 cartes, dont les points ſoient 3, 5, 7, 10, & qu'on ait fait accomplir les points de chacune juſqu'à 11, il faut multiplier 11 par 4, nombre des cartes choiſies, & ajouter au produit 44 le même nombre 4; la ſomme ſera 48, que vous ôterez de 32, nombre des cartes du jeu entier, il reſtera 4, qu'il faudra ôter de 29, nombre des cartes qui ſeront reſtées du jeu, après que celui qui aura choiſi les quatre cartes en aura tiré 8, pour accomplir 11 avec les 3 points de la premiere carte, 6 pour accomplir 11 avec les 3 points de la ſeconde carte, 4 pour accomplir 11 avec les 7 points de la troiſieme carte, & 1 pour accomplir 11 avec les dix points de la quatrieme: toutes ces cartes 8, 6, 4, 1, avec les 4 choiſies, font 23, qui, étant ôtés de 52, donnent pour reſte 29. Ayant donc ôté 4 de 29, le reſte 25 marquera la ſomme des points des quatre cartes choiſies, 3, 5, 7, 10.

Si après avoir ôté du nombre des cartes du jeu propoſé, la ſomme compoſée du nombre des cartes choiſies, & du produit de ce même nombre des cartes choiſies, par le nombre qu'on a fait accomplir, il ne reſte rien, le nombre des cartes reſtées

de tout le jeu, exprimera le nombre des points des cartes choiſies.

Exemple.

Qu'on ait choiſi dans un jeu entier quatre cartes, dont les points ſoient 1, 3, 4, 7, & qu'on les ait fait accomplir juſqu'à 12, il faut multiplier 12 par 4, nombre des cartes choiſies, & ajouter au produit 48, le même nombre 4; la ſomme ſera 52, égale au nombre des cartes du jeu entier. Comme il ne reſte rien, c'eſt une marque que le nombre des points des cartes choiſies ſera exprimé par le nombre des cartes reſtantes, qui eſt 15. Car pour accomplir 12 avec 1, point de la premiere carte, il faut 11 cartes; pour accomplir 12 avec les trois points de la ſeconde carte, il faut 9 cartes; pour accomplir 12 avec les 4 points de la troiſieme carte, il faut 8 cartes: enfin pour accomplir 12, avec les 7 points de la quatrieme carte, il faut 5 cartes. Toutes ces cartes 11, 9, 8 5, avec les 4 choiſies ſont 37, qui étant ôtés de 52, donnent pour reſte 15, nombre des points des cartes choiſies, 1, 3, 4, 7.

Si la ſomme compoſée du nombre des cartes choiſies, & du produit de ce même nombre par le nombre qu'on a fait accomplir, ſe trouve plus grande que le nombre des cartes du jeu propoſé, alors il faut ſouſtraire de cette ſomme le nombre des cartes du jeu propoſé, & le reſte ſera un nombre qu'il faudra ajouter au nombre des cartes reſtées, pour avoir le nombre des points des cartes choiſies.

Exemple.

Si l'on avoit choiſi dans un jeu de trente-ſix cartes, 3 cartes, dont les points fuſſent 4, 7, 9,

& qu'on ſe propoſe d'accomplir ces points juſqu'à 15, avec le nombre des cartes qu'on auroit tiré du jeu, il faudroit multiplier 15, nombre qu'on a fait accomplir, par 3 nombre des cartes choiſies, le produit eſt 45, auquel on ajoutera 3, nombre des cartes choiſies. La ſomme 48 eſt plus grande que 36, nombre des cartes du jeu propoſé : il faut donc ôter 36 de 48, le reſte 12 doit être ajouté au nombre des cartes reſtées, qui eſt 8; car on a dû tirer du jeu propoſé 11 cartes, pour accomplir 15, avec les 4 points de la premiere carte; 8 pour accomplir 15, avec les 7 points de la deuxieme carte; & 6 pour accomplir 15, avec les neuf points de la troiſieme carte : toutes ces cartes 11, 8, 6, avec les 3 choiſies, font 28, qui étant ôtés de 36, nombre des cartes du jeu propoſé, donnent pour reſte 8. Ayant donc ajouté ces 8 cartes avec les 12, différence de 48, ſomme trouvée, à 36, nombre des cartes du jeu propoſé, on aura 20 pour le nombre des points des cartes choiſies 4, 7, 9.

Il faut obſerver 1°. qu'on peut faire accomplir tel nombre qu'on voudra, en comptant, les points de chaque carte juſqu'à ce nombre : il n'eſt pas même néceſſaire de faire accomplir le même nombre avec les points des cartes choiſies. Par exemple, on peut, avec les points des trois cartes choiſies, faire accomplir trois différens nombres, comme 13, 14, 15, ; alors on ajoutera enſemble ces trois nombres, que l'on augmentera de 3, nombre des cartes choiſies, & l'on achevera le reſte comme on a dit.

Il faut 2°. prendre garde qu'il peut arriver que la ſomme des nombres qui vient, lorſqu'on a fait accomplir, eſt ſi grande, qu'il n'y aura point aſſez de cartes dans le jeu propoſé pour les en tirer.

Néanmoins on réſoudra le problême, ſi on ſait de combien le nombre des cartes qu'on devroit retirer, ſurpaſſe celui des cartes du jeu propoſé. Par exemple, ſi le nombre des cartes du jeu propoſé étoit 36, qu'on eût fait accomplir 15, & que les trois cartes choiſies fuſſent 2, 3, 4, il eſt certain qu'on ne pourroit pas retirer de 26 toutes les cartes, lorſqu'on auroit fait accomplir 15 avec tous les points de chacune des cartes; car il faudroit prendre 13 cartes pour accomplir 15 avec 2 points de la premiere carte, 12 pour la ſeconde, & 11 pour la troiſieme; mais ces trois nombres 13, 12, 11, avec 3, nombre des cartes choiſies, font 39, qui eſt plus grand que 36. Il faudra donc ſçavoir que 39 ſurpaſſe 36 de 3: alors on ôtera cet excès 3 de 12, autre excès de 36, nombre des cartes du jeu propoſé à 48, ſomme de 3, nombre des cartes choiſies, & du produit de ce même nombre 3 par 15, nombre qu'on a fait accomplir; & le reſte 9 eſt le nombre des points des trois cartes choiſies, 2, 3, 4. Conſultez Bachet, dans ſes *problêmes plaiſans & délectables*, où vous trouverez des démonſtrations de pluſieurs problêmes qu'on propoſe dans ces problêmes d'arithmétique.

PROBLEME XXXIX.

De ſeize jettons, deviner celui que quelqu'un aura penſé.

IL faut diſpoſer ces jettons en deux rangs, en ſorte qu'il y en ait 8 en l'un & 8 en l'autre, comme on le voit dans la figure ſuivante. Enſuite il faut demander à celui qui aura penſé un jetton dans quel rang il eſt. S'il répond qu'il eſt dans le

rang A, levez les jettons de la rangée A, & diſpoſez-les en deux rangées, dont l'une contiendra 4 jettons, & la ſeconde 4 autres, comme vous voyez en C & D, ayant laiſſé la rangée B ſans y toucher. Demandez encore en quel rang eſt le jetton penſé. Si on dit qu'il eſt dans le rang C, levez le rang C & le rang D, de maniere que les

A B	C B D	E B F	H B I
o o	o o o	o o o	o o o
o o	o o o	o o o	o o o
o o	o o o	o o o	o o o
o o	o o o	o o o	o o o
o o	o	o	o
o o	o	o	o
o o	o	o	o
o o	o	o	o

jettons d'un rang ne ſoient point confondus avec les jettons de l'autre rang, & faites-en deux autres rangs, comme vous voyez en E & F; mais en les rangeant, faites que les jettons du rang C ſoient poſés de côté & d'autre du rang B, en ſorte que le premier du rang C ſoit le premier du rang E, le ſecond du rang C, ſoit le premier du rang F, & le troiſieme du rang C, ſoit le ſecond du rang E, puis le quatrieme du rang C, ſoit le ſecond du rang F, &c. Demandez encore en quel rang ſe trouve le jetton penſé; & ſi on vous dit qu'il eſt dans le rang E, levez encore les jettons comme on vient de le dire & diſpoſez-les de la même façon. Demandez enfin en quel rang eſt le jetton penſé: il doit occuper la premiere place du rang où l'on aura dit qu'il ſe trouve: comme dans cette figure, où le jetton italique eſt le premier de ſon rang.

REMARQUE.

Il ſeroit plus aiſé d'exercer ce problême avec des cartes, & on couvriroit davantage l'artifice, en battant les cartes, après avoir connu celle qui aura été penſée, & en les comptant pour la découvrir.

PROBLÉME XL.

Du jeu de l'anneau.

CE jeu ſe peut pratiquer agréablement dans une compagnie compoſée de pluſieurs perſonnes, dont le nombre ne doit pas être plus grand que 9, afin d'y pouvoir plus facilement appliquer le problême XXI. * On fera valoir 1 la premiere perſonne, 2 la ſeconde, 3 la troiſieme, & ainſi de ſuite. On fera auſſi valoir 1 la main droite, & 2 la main gauche. On donnera pareillement 1 au premier doigt d'une main, 2 au ſecond, 3 au troiſieme, 4 au quatrieme, 5 au cinquieme. Enfin on donnera 1 à la premiere jointure, 2 à la ſeconde, & 3 à la troiſieme. Cela étant imaginé, ſi l'on fait mettre à l'une de ces perſonnes, par exemple à la cinquieme, un anneau à la premiere jointure du quatrieme doigt de ſa main gauche, il eſt évident que pour deviner la perſonne qui aura pris cet anneau ou bague, & dire en quelle main, en quel doigt & en quel jointure il eſt, il n'y a qu'à deviner ces quatre nombres 5, 1, 4, 2, le premier 5 repréſentant la cinquieme perſonne, le ſecond 1 la premiere jointure, le troiſieme 4 le quatrieme doigt, & le quatrieme 2 la main gauche. Ce qui ſe fera en ſuivant la derniere méthode du problême XXI, * comme vous allez voir.

Pag. 163, art. IV.

Otant 1 de 10, double du premier nombre 5; & multipliant le reſte 9, par 5, on a 45, auquel ajoutant le ſecond nombre 1, on a cette ſomme 46, à laquelle ſi on ajoute 5, on a cette ſeconde ſomme 51, dont le double eſt 102, d'où ôtant 1, il reſte 101, qui étant multiplié par 5, produit 505, auquel ajoutant le troiſieme nombre 4, on a cette ſomme 509, à laquelle ajoutant encore 5, on a cette ſeconde ſomme 514, dont le double 1028, étant diminué de 1, & le reſte 1027 étant multiplié par 5, produit 5135, auquel ajoutant le quatrieme nombre 2, on a cette ſomme 5137, à laquelle ajoutant 5, on a cette ſeconde ſomme 5142, dont les quatre figures repréſentent les quatre nombres qu'on cherche, & font connoître par conſéquent que l'anneau eſt dans la premiere jointure du quatrieme doigt de la main gauche de la cinquieme perſonne.

Autre maniere.

On prendra pour premiere perſonne, celle qui eſt le plus à main gauche, comme cela ſe fait ordinairement; pour la ſeconde celle qui eſt après, pour troiſieme celle qui eſt enſuite, & ainſi des autres. On ne fera point d'autre diſtinction entre les deux mains, que d'obſerver le même ordre en comptant pour premier doigt le petit doigt de la main droite, & pour le dixieme le petit doigt de la main gauche, ou d'une autre façon, ſuivant qu'on le trouvera plus commode. Enfin on diſtinguera par ordre les trois jointures de chaque doigt en commençant par celle qui eſt le plus proche de la racine du doigt, ou par celle qui eſt la plus proche du bout du doigt. Cependant comme il ſemble qu'il n'y a que deux jointures au pouce, il ſeroit

peut-être plus à propos de compter ces jointures par celle qui eſt la plus près de l'extrêmité du doigt, & d'avertir qu'on commencera à compter par celle-là.

Cela étant ſuppoſé, dites que l'on double le nombre qui convient à la perſonne qui a la bague, & que l'on ajoute 5 à ce double; dites enſuite qu'on multiplie le tout par 5, & que l'on ajoute à ce produit le nombre qui convient au doigt: cela étant fait, dites encore que l'on multiplie cette ſomme par 10, & que l'on ajoute au produit le nombre qui convient à la jointure où eſt la bague. Demandez enfin la ſomme de ces nombres.

Si vous ôtez ſecretement de cette ſomme le nombre 250, le reſte exprimera par les centaines le nombre de la perſonne qui a la bague, par les dixaines le quantieme des doigts, & par les unités la jointure du doigt.

Exemple.

Je ſuppoſe que la ſeptieme perſonne de la compagnie ait la bague au neuvieme doigt, c'eſt-à-dire, au doigt annulaire de la main gauche, & à la deuxieme jointure de ce doigt. Faites doubler 7, le double ſera 14, auquel vous ferez ajouter 5, la ſomme ſera 19: faites multiplier ces 19 par 5, le produit ſera 95, auſquels faiſant ajouter le nombre 9 qui convient au doigt, il viendra 104. Faites multiplier ce nombre 104, par 10, on aura pour produit 1040, auxquels faiſant ajouter 2, qui convient à la jointure, la ſomme ſera 1042; vous demanderez cette ſomme, & quand vous la ſçaurez, vous en ôterez ſecretement 250, il reſtera 792, dont le 7 exprimera la ſeptieme perſonne qui a la bague, le 9 marquera que c'eſt au neuvieme doigt, & le 2 fera voir que c'eſt à la deuxieme jointure.

REMARQUE.

S'il y avoit un zero au rang des dixaines, ce ſeroit une marque que la bague ſe trouveroit au dixieme doigt : alors il faudroit ôter 1 du nombre des centaines, & le reſte marqueroit le nombre qui convient à la perſonne qui auroit la bague.

PROBLEME XLI.

Pluſieurs cartes étant diſpoſées en divers rangs, deviner celle que quelqu'un aura penſé.

ON prend ordinairement quinze cartes, que l'on diſpoſe en trois rangs, de maniere qu'il y en ait cinq en chaque rang. 1°. Les cartes étant ainſi rangées, & ayant demandé à celui qui en aura penſé une, en quel rang elle ſe trouve ; ramaſſez chaque rang, & aſſemblez-les en mettant dans le milieu celui où ſe trouvera la carte penſée. 2°. Diſpoſez encore toutes les cartes en trois rangs, mettant la premiere, c'eſt-à-dire, celle de deſſus, au premier rang, la ſuivante au ſecond rang, la troiſieme au troiſieme rang, la quatrieme au premier rang, la cinquieme au ſecond rang, & les autres de la même maniere, juſqu'à ce qu'elles ſoient toutes rangées. Puis ayant encore demandé en quel rang eſt la carte penſée, vous ramaſſerez, comme auparavant, chaque rang, & les raſſemblerez, en mettant au milieu celui où ſe trouve la carte penſée. 3°. Vous rangerez encore les cartes de la même maniere qu'on vient de faire, & ayant demandé en quel rang ſe trouve la carte penſée, vous ſerez aſſuré qu'elle ſera la troiſieme de ce même rang. 4°. Ayant reconnu la carte penſée, vous pou-

vez ramaſſer les rangs, en mettant encore au milieu celui où eſt la carte penſée ; pour lors elle ſe trouvera au milieu des quinze cartes, & de quelque côté que l'on commence à compter, elle ſe trouvera la huitieme. On peut auſſi, après avoir reconnu la carte penſée, mêler les cartes, & montrer la carte penſée, en les découvrant l'une après l'autre.

REMARQUES.

On peut faire le même jeu avec un autre nombre de cartes, & en pluſieurs façons différentes. On prendra, par exemple, ſeize cartes que l'on diſpoſera en quatre rangs, à chaque rang on mettra quatre cartes. Après avoir ſçu en quel rang eſt la carte penſée, on levera les rangs ; on retiendra dans ſa mémoire celui où eſt la carte penſée, & on rangera les cartes de la maniere qu'on l'a dit, en ſorte que les cartes des rangs précédens ſe ſéparerout, & que chacune ſe trouvera dans un autre rang : je veux dire que la premiere, ou celle de deſſus les cartes levées, ſe trouvera au premier rang, la ſuivante ſe trouvera au ſecond rang, la troiſieme au troiſieme rang, & la quatrieme au quatrieme rang. Ainſi les quatre cartes, qui étoient enſemble dans la diſpoſition précédente, ſe trouveront dans les quatre rangs dans cette ſeconde diſpoſition. Par conſéquent, ſi l'on avoit mis le rang où ſe trouvoit la carte penſée au deſſus des autres, on ſeroit aſſuré que cette carte eſt la premiere dans l'un des rangs de cette ſeconde diſpoſition. Il ſera donc très aiſé de la deviner, quand on aura demandé en quel rang elle ſe trouve dans cette ſeconde diſpoſition, puiſqu'elle eſt infailliblement la premiere.

Mais ſi le rang où ſe trouvoit la carte dans la premiere diſpoſition, avoit été mis au-deſſous du premier des rangs levés, cette même carte ſe trouveroit la ſeconde dans l'un des rangs de la deuxieme diſpoſition. On juge bien qu'elle ſe trouveroit la troiſieme dans la ſeconde diſpoſition, ſi le rang où elle ſe trouvoit en premier lieu, avoit été mis dans la troiſieme place des rangs levés, & qu'elle ſe trouveroit la quatrieme de l'un des rangs de la ſeconde diſpoſition, ſi ce rang levé avoit été mis à la quatrieme place des rangs levés.

PROBLEME XLII.

Ayant un vaſe rempli de huit pintes de quelque liqueur, en mettre juſtement la moitié dans un autre vaſe de cinq pintes, par le moyen d'un troiſieme vaſe contenant trois pintes.

ON propoſe ordinairement cette queſtion de la ſorte : Quelqu'un ayant une bouteille pleine de 8 pintes d'excellent vin, en veut faire préſent de la moitié, ou de quatre pintes, à un de ſes amis : mais pour la meſurer il n'a que deux autres bouteilles, dont l'une contient 5 pintes, & l'autre 3. On demande comment il doit faire pour mettre quatre pintes dans la bouteille qui en contient cinq.

Pour le ſçavoir, appellons A la bouteille de 8 pintes ; B celle de 5, & C celle de 3 ; en ſuppoſant qu'il y a 8 pintes de vin dans la bouteille A, & que les deux autres B, C, ſoient vuides, comme vous voyez en D. Ayant rempli la bouteille B, du vin de la bouteille A, où il ne reſtera plus que 3 pintes, comme vous voyez en E, rempliſſez

la bouteille C, du vin de la bouteille B, où par conſéquent il ne reſtera plus que 2 pintes, comme vous voyez en F. Après cela verſez le vin de la bouteille C, dans la bouteille A, où par conſéquent il y aura 6 pintes, comme vous voyez en G; & verſez les 2 pintes de la bouteille B, dans la bouteille C, où il y aura deux pintes, comme vous voyez en H. Enfin ayant rempli la bouteille B, du vin de la bouteille A, où il reſtera ſeulement 1 pinte, comme vous voyez en I; achevez de remplir la bouteille C, du vin de la bouteille B, où il reſtera 4 pintes, comme vous voyez en K, & ainſi la queſtion ſe trouvera réſolue.

	8.	5.	3.
	A.	B.	C.
D.	8.	0.	0.
E.	3.	5.	0.
F.	3.	2.	3.
G.	6.	2.	0.
H.	6.	0.	2.
I.	1.	5.	2.
K.	1.	4.	3.

REMARQUE.

Si au lieu de faire reſter les quatre pintes de vin dans la bouteille B, vous voulez qu'elles reſtent dans la bouteille A, que nous avons ſuppoſée remplie de huit pintes, rempliſſez la bouteille C, du vin qui eſt dans la bouteille A, où alors il ne reſtera plus que 5 pintes, comme vous voyez en D, & verſez les trois pintes de la bouteille C, dans la bouteille B, où il y aura par conſéquent 3 pintes de vin, comme vous voyez en E. Puis ayant rempli la bouteille C, du vin de la bouteille A, où il ne reſtera

	8.	5.	3.
	A.	B.	C.
	8.	0.	0.
D.	5.	0.	3.
E.	5.	3.	0.
F.	2.	3.	3.
G.	2.	5.	1.
H.	7.	0.	1.
I.	7.	1.	0.
K.	4.	2.	3.

plus que 2 pintes, comme vous voyez en F, achevez de remplir la bouteille B, du vin qui eſt dans la bouteille C, où il ne reſtera plus qu'une pinte, comme vous voyez en G. Enfin ayant verſé le vin de la bouteille B, dans la bouteille A, où il ſe trouvera 7 pintes, comme vous voyez en H, verſez la pinte de vin qui eſt en C, dans la bouteille B, où il y aura par conſéquent une pinte, comme vous voyez en I, & rempliſſez la bouteille C, du vin de la bouteille A, où il ne reſtera que 4 pintes, comme il étoit propoſé, & comme vous voyez en K.

PROBLEME XLIII.

Une perſonne a une bouteille de douze pintes pleine de vin: il en veut donner 6 pintes au Frere quêteur; il n'a pour les meſurer que deux autres bouteilles, l'une de ſept pintes, & l'autre de cinq. Que doit-il faire pour avoir les ſix pintes dans la bouteille de ſept pintes?

CE problème eſt la même choſe que le précédent, on l'exécutera auſſi de la même maniere. Soit nommée D la bouteille de 12 pintes, S celle de ſept pintes, & C celle de cinq pintes. La bouteille D eſt pleine, & les deux autres S, C, ſont vuides, comme on voit en G. Rempliſſez la bouteille C, du vin qui eſt en D, & la bouteille D ne contiendra plus que 7 pintes, comme on voit en H. Puis verſez dans S le vin que contient la bouteille C, qui demeurera vuide, & la bouteille S contiendra 5 pintes, comme on voit en I. Enſuite ayant rempli C, avec le vin qui eſt en D, la bouteille D ne contiendra plus que 2 pintes, la bouteille

bouteille S, en contiendra 5, & la bouteille C ſera pleine, comme on voit en K : après cela verſez de la bouteille C, du vin dans la bouteille S, pour la remplir, & la bouteille D ne contiendra encore que deux pintes, la bouteille S en contiendra ſept, & la bouteille C n'en contiendra plus que trois, comme on voit en L. Cela étant fait, vuidez S en D, & C en S, & il y aura neuf pintes en D, trois pintes en S, & C ſera vuide, comme on le voit en M. Enſuite remplissez C de la bouteille D, & de C verſez en S pour la remplir ; alors il y aura quatre pintes en D, ſept pintes en S, & une pinte en C, comme vous voyez en N. Cela fait, remettez les ſept pintes de S dans D, & la pinte de C dans S, & D contiendra onze pintes, S en contiendra une, & C ſera vuide, comme on le voit en P. Enfin ayant rempli de la bouteille D la bouteille C, qui contient cinq pintes ; & ayant verſé ces cinq pintes de C dans la bouteille S, qui en contient déja une, on trouvera que D contient ſix pintes, & que S en contient auſſi ſix ; ainſi on eſt parvenu à ce qu'on ſouhaitoit.

	D.	S.	C.
G.	12.	0.	0.
H.	7.	0.	5.
I.	7.	5.	0.
K.	2.	5.	5.
L.	2.	7.	3.
M.	9.	3.	0.
N.	4.	7.	1.
P.	11.	1.	0.
Q.	6.	6.	0.

PROBLEME XLIV.

Partager à trois perſonnes vingt-un tonneaux, dont il y en a ſept vuides, ſept pleins, & ſept demi-pleins; de telle maniere que ces trois perſonnes ayent autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

CEtte queſtion peut être réſolue en deux manieres. On voit d'abord que chacune de ces perſonnes doit avoir ſept tonneaux. On peut partager 7 en 3 parties, 2, 2, 3, qui priſes enſemble font 7. Ces trois nombres ſervent à la premiere ſolution de la queſtion.

Premiere ſolution.

Le premier de ces nombres 2 doit être appliqué à la premiere perſonne, qui prendra 2 tonneaux pleins, 2 tonneaux vuides, & par conſéquent 3 à moitié pleins, pour en avoir 7. Le ſecond nombre 2 s'appliquera à la deuxieme perſonne, qui prendra, comme la premiere, 2 tonneaux pleins, 2 vuides, & 3 demi-pleins. Enfin le troiſieme nombre 3 s'appliquera à la troiſieme perſonne, qui prendra 3 tonneaux pleins, 3 tonneaux vuides, & un tonneau demi-plein, pour en avoir 7. De cette maniere, ces trois perſonnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

	pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e Perſ.	2	2	3
2e Perſ.	2	2	3
3e Perſ.	3	3	1

Le même nombre 7 peut être encore partagé en 3 autres parties, 3, 3, 1, qui priſes enſemble font 7. Ces trois nombres ſervent à la deuxieme ſolution de la queſtion.

Deuxieme ſolution.

Le premier de ces nombres 3 s'appliquera à la premiere perſonne, qui prendra 3 tonneaux pleins, 3 vuides, & 1 à moitié plein, pour en avoir ſept. Le deuxieme nombre 3 s'appliquera à la ſeconde

	pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e Perſ.	3	3	1
2e Perſ.	3	3	1
3e Perſ.	1	1	5

perſonne, qui prendra ſes tonneaux comme la premiere perſonne. Enfin le troiſieme nombre 1 s'appliquera à la troiſieme perſonne qui prendra un tonneau plein, un tonneau vuide, & cinq à moitié pleins, pour en avoir ſept. Ainſi ces trois perſonnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

On a mis ici deux tables, que l'on peut diſtinguer en colonnes perpendiculaires, & en colonnes horiſontales. Les colonnes perpendiculaires marquent la qualité des tonneaux qui doivent être diſtribués à chacune des trois perſonnes, & les colonnes horiſontales, ou tranſverſales, marquent la quantité des tonneaux, eu égard à leur qualité, qui doivent être diſtribués à chaque perſonne.

Il eſt évident que les trois perſonnes ont chacune 7 tonneaux, comme il paroît en ajoutant enſem-

ble les nombres qui ſe trouvent dans une colonne horiſontale, & qui appartiennent à une ſeule perſonne. Il eſt aiſé de reconnoître qu'elles ont autant de vin l'une que l'autre, en ajoutant les tonneaux pleins, avec la moitié des tonneaux demi-pleins d'une part, & les tonneaux vuides avec la moitié reſtante des tonneaux demi-pleins, ou plutôt demi-vuides, d'autre part, pour la même perſonne. On fera la même obſervation ſur les exemples & les tables ſuivantes.

REMARQUES.

La regle générale pour réſoudre ces ſortes de queſtions, eſt de diviſer le nombre des tonneaux par le nombres des perſonnes. Si le quotient n'eſt pas un nombre entier, la queſtion eſt impoſſible: mais ſi le quotient eſt un nombre entier, il faut partager ce quotient en autant de parties qu'il y a de perſonnes, avec cette condition, que chacune de ces parties ſera plus petite que la moitié du quotient trouvé. Chaque perſonne prendra autant de tonneaux vuides que de pleins.

S'il étoit propoſé de partager 21 tonneaux à 4 perſonnes, la queſtion ſeroit impoſſible; puiſqu'on ne peut diviſer exactement 21 par 4*. Mais ſi on propoſoit de partager à 4 perſonnes 24 tonneaux, avec les mêmes conditions ci-deſſus, la queſtion eſt très-poſſible; car diviſant 24 par 4, il vient au quotient 6, qui eſt un nombre entier, & 6 peut être diviſé en ces quatre parties 2, 2, 1, 1, qui ſerviront à la ſolution de la queſtion propo-

* Pour partager également à quatre perſonnes 21 tonneaux, il faudroit en donner 5 $\frac{1}{4}$ à chacune. On ne peut ainſi briſer un tonneau en pluſieurs pieces.

ſée, ſelon la table qu'on a ajouté ici, où l'on voit

	pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*	$\frac{1}{2}$ *vuides.*
1e Perſ.	2	2	1	1
2e Perſ.	2	2	1	1
3e Perſ.	1	1	2	2
4e Perſ.	1	1	2	2

que les quatre perſonnes ont autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

Cette queſtion n'a qu'une ſeule ſolution, parce que le nombre 6 ne peut être partagé en 4 autres parties, telles que la plus petite ſoit moindre que la moitié de lui-même.

On peut encore partager 27 tonneaux à trois perſonnes, avec les mêmes conditions que l'on a ſuppoſé dans les autres exemples : car 27 peut être exactement diviſé par 3, & le quotient eſt 9 ; mais ce nombre 9 peut être diviſé en trois parties, dont chacune ſera plus petite que la moitié de lui-même : ce qui ſe peut faire en trois manieres diffé-

	pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e Perſ.	3	3	3
2e Perſ.	3	3	3
3e Perſ.	3	3	3

rentes : car 9 peut être premierement partagé en ces trois parties 3, 3, 3, dont la ſomme fait 9. La table qui eſt ci-deſſus montre ce que chacune des trois perſonnes doit avoir de tonneaux tant pleins que vuides & demi-pleins.

Ce même nombre 9 peut en ſecond lieu être

diviſé en trois autres nombres 1, 4, 4, qui pris

	Pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e Perſ.	1	1	7
2e Perſ.	4	4	1
3e Perſ.	4	4	1

enſemble font 9. Les trois perſonnes ſeront partagées de la maniere qn'on le voit dans cette table. Enfin ce nombre 9 peut être partagé en ces trois autres nombres, 2, 3, 4, dont la ſomme eſt 9.

	pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e Perſ.	2	2	5
2e Perſ.	3	3	3
3e Perſ.	4	4	1

& les trois perſonnes ſeront partagées comme il eſt marqué dans la table qu'on a ici ajouté.

On voit dans ces trois dernieres tables que les trois perſonnes ont autant de tonneaux & de vin, l'une que l'autre.

PROBLEME XLV.

Quinze Chrétiens & quinze Turcs ſe trouvent ſurmer dans un même vaiſſeau ; il ſurvient une furieuſe tempête. Après avoir jetté dans l'eau toutes les marchandiſes, le pilote dit qu'il eſt encore néceſſaire d'y jetter la moitié des perſonnes. Il les fait ranger de ſuite, & en comptant de neuf en neuf, il jette chaque neuvieme dans la mer, en recommençant à compter le premier du rang, lorſque le rang eſt fini : il ſe trouve

qu'après avoir jetté quinze perſonnes, les quinze Chrétiens ſont reſtés. Comment a-t-il diſpoſé les trente perſonnes pour ſauver les Chrétiens ?

LA diſpoſition de ces trente perſonnes ſe tirera de ces deux vers françois.

Mort, tu ne failliras pas,
En me livrant le trépas.

Il ſuffit de faire attention aux voyelles A, E, I, O, U, qui ſe trouvent dans les ſyllabes des mots qui compoſent ces deux vers. On doit ſuppoſer que A vaut 1, E vaut 2, I vaut 3, O vaut 4, & U vaut 5. On commencera à ranger des Chrétiens, puis des Turcs, & ainſi de ſuite, en mettant alternativement des Chrétiens & des Turcs, juſqu'à ce qu'on ait rangé les trente perſonnes. Cela étant ſuppoſé, l'O, qui eſt dans la premiere ſyllabe (mort) fait connoître qu'on doit ranger d'abord 4 Chrétiens; l'U, qui eſt dans la ſeconde ſyllabe (tu) montre qu'on doit ranger enſuite 5 Turcs; l'E, qui eſt dans la troiſieme ſyllabe (ne) fait voir qu'on doit diſpoſer 2 Chrétiens; l'A, de la quatrieme ſyllabe (fail) montre qu'on doit mettre enſuite 1 Turc; l'I de la cinquieme ſyllabe fait connoître qu'on doit ranger 3 Chrétiens, & ainſi des autres, en appliquant les voyelles de chaque ſyllabe aux nombres qu'on leur a attribué.

REMARQUE.

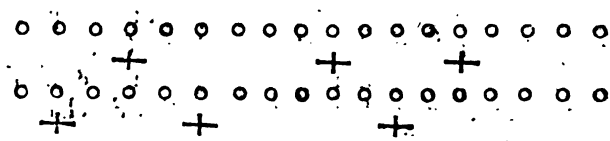
Au lieu des deux vers françois, on peut employer ce vers latins, où l'on trouve les mêmes voyelles dans le même ordre.

Populeam virgam mater regina ferebas.

On donnera ici plus d'étendue à ce problême, afin qu'il puiſſe être utile aux capitaines, qui ayant pluſieurs ſoldats à punir, ſont obligés de les faire décimer. Par ce moyen ils feront tomber le ſort ſur les plus coupables, en les rangeant de la maniere que nous allons enſeigner.

La regle eſt d'écrire autant de zeros qu'il y a de perſonnes coupables, & commençant à compter par le premier zero de marquer avec une croix le quantieme qu'on voudra punir, & de faire la même choſe en recommençant le rang, & paſſant les zeros marqués juſqu'à ce qu'on ait marqué le nombre qu'on ſouhaite punir. Il faudra diſpoſer les ſoldats de la même maniere qu'on a rangé les zeros, & mettre les plus coupables au lieu où ſe trouveront les zéros marqués de la croix.

Par exemple, ſi trente-ſix ſoldats ſont coupables, & qu'on en veuille punir ſix des plus coupables en les décimant, c'eſt-à-dire, en les comptant dix à dix, pour faire punir chaque dixieme, on les rangera comme on voit ces trente-ſix zeros rangés, & on aura ſoin de faire mettre les plus coupables à la place où l'on voit des croix ſur les zeros.



Il eſt aiſé d'appliquer cette régle à quelque nombre que ce ſoit, & à quelque quantité qu'on veuille rejetter d'un nombre déterminé.

On prétend que c'eſt en pratiquant cette regle, que Joſephe, l'hiſtorien juif, reſta ſeul avec un autre, de quarante & un qu'ils étoient dans une caverne, où ils s'étoient retirés après la priſe de

Jotapata, par Veſpaſien. L'hiſtoire en eſt aſſez curieuſe pour la rapporter ici : je ne ferai que la copier de la préface de Bachet ſur ſes *problêmes plaiſans & délectables*, après l'avoir conféré avec ce qu'en dit lui-même Joſephe, dans ſon hiſtoire de la guerre des juifs, liv. 3, chap. 14.

« Hegeſipus, dit Bachet, rapporte au troiſieme » livre de la priſe de Jéruſalem, la mémorable » hiſtoire de Joſephe, qui étant gouverneur dans » la ville de Jatapata, lorſqu'elle fut aſſiégée, & » un peu après emportée d'aſſaut, par Veſpaſien, » fut contraint de ſe retirer dans *une caverne qui* « *étoit au fond d'une foſſe, où il trouva quarante* « *braves guerriers*, pour éviter la fureur des armes » victorieuſes des Romains. Mais il fut expoſé à » un plus grand péril parmi les ſiens, que parmi les » ennemis ; car comme il eut arrêté de s'aller rendre à la diſcrétion du vainqueur, ne pouvant » imaginer aucun autre moyen de ſe garantir de la » mort, il trouva ſes ſoldats ſaiſis d'une telle frénéſie, qu'ils vouloient tous mourir, & s'entre» tuer les uns les autres, plutôt que de prendre ce » parti. Joſephe s'efforça de les détourner d'une ſi » malheureuſe entrepriſe ; mais ce fut en vain : car » rejettant tout ce qu'il put alléguer au contraire, » & perſiſtant en leur opinion, ils en vinrent juſ» ques-là que de ſe menacer que, s'il ne s'y portoit » volontairement, de l'y contraindre par force, & » de commencer par lui-même l'exécution de leur » tragique deſſein. Alors ſans doute c'étoit fait de » ſa vie, s'il n'eût eu l'eſprit de ſe défaire de ces » furieux, par l'artifice de mon vingt-troiſieme pro» blême : car feignant d'adhérer à leur volonté, il » ſe conſerva l'autorité qu'il avoit ſur eux, & par » ce moyen leur perſuada facilement que, pour

» éviter le déſordre & la confuſion qui pourroient » ſurvenir en un tel acte, s'ils s'entre-tuoient à la » foule, il valoit mieux ſe ranger par ordre en » quelque façon, & commençant à compter par » un bout, maſſacrer toujours le tantieme (l'au- » teur n'exprime pas le quantieme) juſqu'à ce qu'il » n'en demeurât qu'un ſeul, lequel ſeroit obligé » de ſe tuer lui-même. Tous en étant demeurés » d'accord, Joſephe les diſpoſa de cette ſorte, & » choiſit pour lui une ſi bonne place, que la tue- » rie étant continuée juſqu'à la fin, il demeura ſeul » avec un autre, qu'il ſauva apparemment de la » même maniere, parce qu'il pouvoit en attendre » une entiere & parfaite obéiſſance ».

Bachet nous inſtruit lui-même, dans ſon vingt-troiſieme problême, de la maniere dont Joſephe a pu s'y prendre pour ſe ſauver lui-même avec un de ſes compagnons. Comme il y avoit quarante ſoldats avec Joſephe dans cette caverne, ce qui faiſoit en tout quarante & une perſonnes, on peut ſuppoſer qu'il ordonna que comptant de trois en trois on tueroit toujours le troiſieme. Cela étant ſuppoſé, il eſt aiſé de connoître par la regle, qu'il ſe mit le trente & unieme, & qu'il fit mettre en la ſezieme place celui qu'il voulut ſauver.

PROBLEME XLVI.

Trois choſes ayant été diſtribuées ſecretement à trois perſonnes, deviner celle que chacun aura pris.

QUe ces trois choſes ſoient une bague, un écu, & un gand; vous vous repréſenterez la bague par la lettre A, l'écu par E, & le gand par I. Que les trois perſonnes ſoient Pierre, Si-

mon & Thomas ; vous les regarderez dans leur place reſpective rangés que l'un, comme Pierre, ſera le premier, Simon le ſecond, & Thomas le troiſieme. Ayant fait ces diſpoſitions en vous même, vous prendrez vingt-quatre jettons, dont vous donnerez un à Pierre, deux à Simon, & trois à Thomas ; vous laiſſerez les dix-huit autres ſur la table : enſuite vous vous retirerez de la compagnie, afin que les trois perſonnes ſe diſtribuent les trois choſes propoſées ſans que vous le voyiez. Cette diſtribution étant faite, vous direz que celui qui a pris la bague prenne, des dix-huit jettons qui ſont reſtés, autant de jettons que vous lui en avez donné : que celui qui a pris l'écu prenne des jettons reſtés deux fois autant de jettons que vous lui en avez donné : enfin que celui qui a pris le gand, prenne ſur le reſte des jettons quatre fois autant de jettons que vous lui en avez donné [dans notre ſuppoſition Pierre en aura pris un, Simon quatre, & Thomas douze ; par conſéquent il ne ſera reſté qu'un jetton ſur la table]. Cela étant fait, vous reviendrez, & vous connoîtrez par ce qui ſera reſté de jettons la choſe que chacun aura pris, en faiſant uſage de ce vers françois.

1 2 3 5 6 7
Par ſer Ceſar jadis devint ſi grand prince.

Pour pouvoir ſe ſervir des mots de ce vers, il faut ſçavoir qu'il ne peut reſter qu'un jetton, ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, & jamais 4 ; il faut de plus faire attention que chaque ſyllabe contient une des voyelles, que nous avons dit repréſenter les trois choſes propoſées : enfin il faut conſidérer ce vers, comme n'étant compoſé que de ſept mots, & que la premiere ſyllabe de chaque

mot repréſente la premiere perſonne, qui eſt Pierre, & la ſeconde ſyllabe repréſente la ſeconde perſonne, qui eſt Simon. Cela bien conçu, s'il ne reſte qu'un jetton, comme dans notre ſuppoſition, vous vous ſervirez du premier mot, ou plutôt des deux premieres ſyllabes: *Par fer*, dont la premiere qui contient A, fait voir que la premiere perſonne, ou Pierre, a la bague repréſentée par A; & la ſeconde ſyllabe, qui contient E, montre que la ſeconde perſonne, ou Simon, a l'écu repréſenté par E; d'où vous conclurez facilement que la troiſieme perſonne, ou Thomas, a le gant.

S'il reſtoit 2 jettons, vous conſulteriez le ſecond mot *Ceſar*, dont la premiere ſyllabe, qui contient E, feroit connoître que la premiere perſonne auroit l'écu repréſenté par E; & la ſeconde ſyllabe, qui contient A, montreroit que la ſeconde perſonne auroit la bague repréſentée par A: d'où il ſeroit aiſé de conclure que la troiſieme perſonne auroit le gant. En un mot, ſelon le nombre des jettons qui reſteront, vous employerez le mot du vers qui ſera marqué du même nombre.

REMARQUES.

Au lieu du vers françois qu'on a rapporté on peut ſe ſervir de ce vers-latin.

1 2 3 5 6 7
Salvè certâ animæ ſemitâ vitâ quies.

Ce problême peut être exécuté un peu autrement qu'on vient de le faire, & on peut l'appliquer à plus de trois perſonnes: ceux qui voudront en être plus particulierement inſtruits, conſulte-

ront Bachet, dans le vingt-cinquieme de ſes *problêmes plaiſans & délectables.*

PROBLEME XLVII.

Trois perſonnes ont un certain nombre d'écus. La premiere donne des ſiens aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Enſuite la ſeconde en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Enfin la troiſieme en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Cette diſtribution étant faite, il ſe trouve que chaque perſonne a huit écus. On demande combien elles en avoient chacune.

LA premiere perſonne avoit 13 écus, la ſeconde 7, & la troiſieme 4; ce qu'il eſt aiſé de reconnoître en diſtribuant les écus de chaque perſonne, ſuivant ce qui eſt énoncé dans le problême.

REMARQUE.

L'agebre donne aiſément la réſolution de ce problême. Ceux qui commencent à l'apprendre, pourront s'exercer à la trouver, & à former d'autres problêmes ſur ce modele. Comme ſi la premiere perſonne donne trois fois autant d'écus aux deux autres qu'elles en ont, &c. & qu'au lieu de déterminer le nombre égal d'écus que chaque perſonne a à la fin, ils le laiſſent indéterminé, ils trouveront des ſolutions à l'infini. Ils reconnoîtront auſſi que ce problême quarante-ſeptieme eſt le fondement du trentieme.

PROBLEME XLVIII.

Il ſe trouve trois perſonnes dans une compagnie, la ſeconde eſt plus âgée que la premiere de douze ans, la troiſieme eſt plus âgée que la ſeconde de treize ans : leurs trois âges font le nombre de cent ans. On demande quel eſt l'âge de chaque perſonne.

IL faut ajouter les deux différences des âges donnés, qui ſont ici 12 & 25 [car la troiſieme perſonne ayant 13 ans plus que la ſeconde, il faut joindre la différence de ſes années avec celle des années de la ſeconde]. La ſomme de ces deux différences eſt 37, qu'il faut ôter de la ſomme totale 100, le reſte 63 ſera diviſé par 3, nombre des perſonnes dont on veut ſçavoir les âges : le quotient 21 eſt l'âge de la premiere perſonne ; par conſéquent 33 eſt l'âge de la ſeconde, & 46 l'âge de la troiſieme. Ces trois nombres 21, 33, 46, ſont enſemble 100.

PROBLEME XLIX.

Découvrir ſi un ouvrage que l'ouvrier aſſure être de pur or, eſt mêlé d'argent, ſans l'endommager.

VItruve rapporte que le roi Hieron voulant faire faire une couronne d'or d'un poids conſidérable, donna la matiere à un orfevre. La couronne fut très-bien faite, & elle ſe trouva être d'un poids égal à l'or qui avoit été fourni : on appréhenda cependant que l'orfevre n'eût volé de l'or, & n'y eût mêlé de l'argent. Archimede fut

chargé de découvrir la fraude, ſans endommager la couronne; il le fit en plongeant entiérement la couronne dans un vaſe plein d'eau, & en peſant exactement la quantité d'eau qui en étoit ſortie, il plongea auſſi entierement dans le même vaſe plein d'eau deux maſſes, l'une d'or & l'autre d'argent, & peſa exactement la quantité d'eau qu'avoient fait ſortir du vaſe ces deux maſſes, qui y avoient été plongées l'une après l'autre, il trouva que la maſſe d'or pur avoit fait ſortir une plus petite quantité d'eau que la couronne d'or, & que la couronne d'or en avoit fait ſortir une plus petite quantité que la maſſe d'argent.

Le même auteur ne dit point quelle étoit la quantité de l'or, ni quel fut le raiſonnement d'Archiméde pour découvrir la tromperie de l'orfevre: Mais on peut ſuppoſer que la couronne peſoit 20 marcs; qu'ayant été plongée dans un vaiſſeau plein d'eau, elle en fit ſortir 13 marcs d'eau; que la maſſe d'or pur & d'égal poids n'en fit ſortir que 12 marcs d'eau; qu'enfin la maſſe d'argent en fit ſortir 18 marcs d'eau.

Cela ſuppoſé, on découvrira par la regle de fauſſe poſition, ou par quelques équations algébriques, que l'orfevre avoit mêlé 3 marcs & un tiers d'argent dans la couronne. Voyez l'*abrégé de l'arithmétique* d'Iſon, page 395, on y trouvera la ſolution de pluſieurs queſtions par algebre.

PROBLEME L.

Un boucher donne commiſſion d'acheter pour cent écus cent bêtes, ſçavoir, des bœufs, des veaux, des brebis & des cochons. Le commiſſionnaire lui amene cent bêtes : il a payé 9 écus de cha-

que bœuf, 1 écu de chaque veau, 30 ſols de chaque brebis, & 3 écus de chaque cochon. On demande combien il a amené de bœufs, de veaux, de brebis & de cochons.

CE problême eſt capable d'un grand nombre de réſolutions; c'eſt ce qui fait qu'on ne peut déterminer préciſément le nombre de chaque ſorte de bêtes que le commiſſionnaire a amené. Il pourroit avoir amené 3 bœufs, 44 veaux, 52 brebis & un cochon, qui font en tout 100 bêtes: le prix des bœuf eſt 27 écus, le prix des veaux eſt 44 écus, le prix des brebis eſt 26 écus, & le prix du cochon eſt 3 écus: tous ces prix font enſemble 100 écus, ſelon les conditions du problême. On peut dire encore qu'il a amené 4 bœufs, 17 veaux, 76 brebis, & 3 cochons: ce qu'on pourra vérifier par le prix de chaque ſorte de bêtes, qu'on a déterminé dans les conditions du problême: ou bien 5 bœufs, 5 veaux, 88 brebis, & deux cochons, &c.

PROBLEME LI.

QUESTION I.

Un particulier a fait marché avec un ouvrier pour creuſer un puits de 20 toiſes de profondeur, à condition de lui donner 30 livres, quand il aura achevé ce puits. L'ouvrier tombe malade, après avoir creuſé 12 toiſes. On demande combien il eſt dû à cet ouvrier.

IL eſt dû à cet ouvrier 11 livres & $\frac{1}{7}$. Pour réſoudre cette queſtion, & les autres de même nature, il faut faire une regle de trois, dont le premier

premier terme ſera la ſomme des toiſes de la progreſſion arithmétique depuis 1 juſqu'à 20, que l'on trouvera * être ici 210; le ſecond terme ſera la ſomme dont on eſt convenu, qui eſt dans cette queſtion 30 livres, & le troiſieme terme ſera la ſomme des termes depuis 1 juſqu'à 12, que l'on trouvera * être ici 78; car il eſt conſtant qu'il y a plus de peine à creuſer les toiſes plus avancées, que celles qui le ſont moins, & cela en proportion arithmétique.

* Par le probl. 1 arr. 1 p. 59.

QUESTION II.

Un tailleur a pris ſix aulnes de drap qui a trois quarts de large, pour faire un habit complet: on veut ſçavoir combien il faut d'aulnes d'une étoffe qui n'a qu'une demi-aulne de large.

ON prendra neuf aulnes de cette étoffe, qui n'a qu'une demi-aulne de large. Cette queſtion paroît embarraſſante; il faut s'y conduire avec quelque précaution. Elle ſe réduit à une regle de trois inverſe, qu'on peut énoncer de cette façon. Si $\frac{3}{4}$ donnent 6 aulnes, combien $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$? On exprime la demi-aulne par $\frac{1}{4}$, afin que le troiſieme terme ſoit analogue au premier. Pour réſoudre cette queſtion ainſi énoncée, il ne faut point avoir égard au dénominateur 4, qui eſt le même dans les deux fractions, il ſuffit de multiplier 6 aulnes par 3, numérateur de la premiere fraction, & de diviſer le produit 18 par 2, numérateur de l'autre fraction.

REMARQUES.

Il y a certaines questions qui se résolvent par l'attention que l'on fait à la chose exprimée, & à la maniere dont elle est exprimée : on en donnera quelques exemples dans les articles suivans.

I.

Un rôtisseur achete 20 perdrix, 8 livres, à raison de 2 livres les cinq; un autre rôtisseur de ses voisins a besoin de perdrix, il le prie de lui en vendre quelques-unes au prix courant. Que doit faire le rôtisseur pour les vendre au même prix, & y gagner ? Il doit en faire deux parts, en séparant les dix meilleures d'avec les autres qui ne sont pas si bonnes. Il vendra la paire des meilleures une livre, & trois des moindres une livre aussi : ces cinq vaudront 2 livres, qui est le prix courant. De cette maniere le rôtisseur vendra 5 livres les dix perdrix grasses, & des dix moindres il en vendra neuf pour 3 livres ; de sorte qu'il lui restera une perdrix pour le gain.

II.

On demande le juste prix d'un cent pesant de cordage goudronné ; supposant que le cent pesant de chanvre coûte 16 livres, & qu'on paye 52 sols 6 deniers pour la peine de l'espader, peigner & filer. On suppose en second lieu que le cent pesant de chanvre diminue de 8 livres dans sa réduction, ou conversion en fil blanc, & qu'on donne 4 sols 9 deniers pour la peine de goudronner

le cent peſant de fil blanc. On ſuppoſe en troiſieme lieu que le cent peſant de fil blanc ne prend que 20 livres de goudron par cent ; que la livre de goudron vaut 8 deniers, & qu'on paye 16 ſols pour la peine de le corder.

Solution.

Je mets en une ſomme 16 livres, & 52 ſols 6 deniers, c'eſt-à-dire, le prix du chanvre & de ſa façon, pour le réduire en fil blanc; cela fait 18 livres 12 ſols 6 deniers: ce ſera le prix de 92 livres de fil blanc ſeulement, à cauſe des 8 livres de déchet en le façonnant. Je dis: ſi 92 livres de fil blanc coûtent 18 livres 12 ſols 6 deniers, combien coûteront 100 livres du même fil blanc? Il vient 20 livres 4 ſols 10 deniers, & $\frac{16}{23}$ de denier, pour la valeur du cent de fil blanc prêt à goudronner.

Il ne reſte donc plus qu'à ajouter à cette ſomme les 4 ſols 9 deniers pour la peine de goudronner le cent peſant de fil blanc; il faut encore y ajouter 13 ſols 4 deniers pour les 20 livres de goudron à 8 deniers la livre: ces trois ſommes ajoutées enſemble font 21 livres 2 ſols 11 deniers $\frac{16}{23}$ de denier, pour le prix de 120 livres de fil goudronné.

Il faut enſuite dire: ſi 120 livres de fil goudronné coûtent 21 livres 2 ſols 11 deniers, & $\frac{16}{23}$ de denier, combien coûteront 100 livres? Il viendra 17 livres 12 ſols 5 deniers, & $\frac{101}{138}$ de denier, pour la valeur du cent peſant de fil goudronné, auquel ajoutant 16 ſols pour la peine de le corder, on aura 18 livres 8 ſols 5 deniers, & $\frac{193}{138}$ de denier,

pour la valeur juſte du cent peſant de cordage goudronné.

Cet exemple eſt extrait de l'arithmétique univerſelle : on a cru qu'il étoit aſſez curieux pour trouver ici ſa place.

PROBLEME LII.

Faire parcourir au cavalier du jeu des échets toutes les caſes du damier, l'une après l'autre, ſans entrer deux fois dans la même caſe.

ON ſçait que le cavalier du jeu des échets a une marche toute particuliere ; il va, pour ainſi dire, en caracolant ; & il paſſe d'une caſe d'un rang à une caſe d'un autre rang, en ſautant par-deſſus deux caſes, & allant du blanc au noir, & du noir au blanc.

I.

Ce problême peut recevoir un grand nombre de ſolutions ; il eſt aſſez conſidérable pour avoir mérité l'attention de quelques grands géometres. Il eſt vrai qu'ils n'en ont point donné de ſolution générale : c'eſt ce qui marque la difficulté qu'il y a à la trouver ; ils en ont cependant communiqué quelques-unes particulieres : on ne rapportera ici que trois de ces ſolutions ; dans les deux premieres, on commence à faire partir le cavalier de la caſe d'un angle du damier, & dans la troiſieme on commence à le faire partir de l'une des quatre caſes qui ſont au milieu du damier ; cette derniere maniere de réſoudre le problême propoſé eſt plus difficile à trouver que les autres.

La premiere eſt de M. de Montmort, auteur

de l'eſſai de l'analiſe ſur les jeux de haſard ; la ſeconde eſt de M. Moivre, Anglois ; la troiſieme eſt de M. de Mairan, directeur de l'académie royale des ſciences, * à qui je dois le problême, & les trois ſolutions qu'on trouve ici. * 1722.

Les tables ſuivantes repréſentent un damier ; on a mis des nombres dans les caſes que le cavalier doit parcourir l'une après l'autre. Ainſi dans la maniere de M. Montmort, le cavalier ſe place d'abord ſur la premiere caſe d'en haut, qui eſt au côté gauche : de-là on le fait paſſer à la troiſieme caſe du ſecond rang horiſontal, où l'on a marqué 2 ; enſuite on le fait ſauter dans la cinquieme caſe du premier rang horiſontal marqué 3 ; après on le fait paſſer dans la ſeptieme caſe du ſecond rang horiſontal marqué 4 : on continue à le faire aller dans les caſes qui ſont marquées des nombres ſelon leur

I. *de M. de Montmort.*

1	38	31	44	3	46	29	42
32	35	2	39	30	43	4	47
37	8	33	26	45	6	41	28
34	25	36	7	40	27	48	5
9	60	17	56	11	52	19	50
24	57	10	63	18	49	12	53
61	16	59	22	55	14	51	20
58	23	62	15	64	21	54	13

ordre naturel, juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à la cinquieme caſe du dernier rang horiſontal d'en bas, marquée 64, qui eſt la derniere où il arrive,

après avoir passé dans toutes les cases les unes après les autres.

On fera la même observation dans les deux autres tables; on suivra l'ordre naturel des nombres, pour conduire le cavalier dans toutes les cases.

II. *de M. de Moivre.*

14	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

III. *de M. de Mairan.*

40	9	26	53	42	7	64	29
25	52	41	8	27	30	43	6
10	39	24	57	54	63	28	31
23	56	51	60	1	44	5	62
50	11	38	55	58	61	32	45
37	22	59	48	19	2	15	4
12	49	20	35	14	17	46	33
21	36	13	18	47	34	3	16

Il ſuffit de jetter les yeux ſur ces trois tables, pour connoître la marche qu'on doit faire tenir au cavalier, lorſqu'on l'a placé ſur l'une des caſes marquées 1. On peut choiſir telle autre caſe qu'il plaira, & rechercher ſoi-même par quelles caſes paſſera le cavalier, pour les lui faire parcourir toutes l'une après l'autre, quand on l'aura placé ſur la caſe qui aura été choiſie.

II.

Premiere maniere.

Pour exécuter ce problême ſur un damier, il faut mettre un jetton ſur chaque caſe, en ſorte que toutes les caſes blanches & noires ſoient couvertes de jettons. On commencera par ôter le jetton de la caſe où l'on placera d'abord le cavalier, & à meſure qu'on le fera entrer dans une autre caſe, on ôtera le jetton qui la couvre. Ainſi on ſera ſûr d'avoir fait parcourir toutes les caſes au cavalier, quand tous les jettons auront été levés.

Seconde maniere.

Au lieu de couvrir d'abord de jettons toutes les caſes, on peut ne couvrir chaque caſe, qu'à meſure qu'on y fait paſſer le cavalier, & quand toutes les caſes ſeront couvertes, on ſera aſſuré d'avoir exécuté le problême.

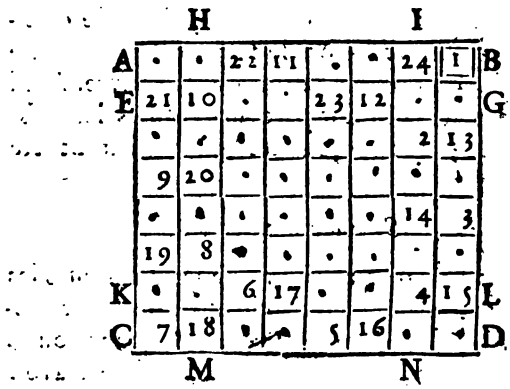
III.

La méthode de M. Moivre a paru la plus ſimple; c'eſt ce qui a engagé à la developper: mais afin de faire voir l'ordre qu'il a ſuivi, je vais ſéparer & décompoſer, pour ainſi dire, les nombres

marqués dans les cases du second quarré précédent, & donner trois autres quarrés, par le moyen desquels j'espere qu'il sera aisé de retenir cette maniere, pour la pratiquer sur le champ, sans avoir besoin de consulter aucun modele.

Soit donc le quarré ABCD, divisé en 64 quarrés, qui représentent les cases d'un damier.

J'appelle les bandes ou les rangs AB, BD, AC, CD, *premieres bandes*, ou *premiers rangs en dehors*. J'appelle encore les bandes EG, KL, HM, IN, *secondes bandes*, ou *seconds rangs en dehors*, par rapport aux premiers rangs en dehors, qu'on vient d'indiquer; & ainsi des autres, à mesure qu'on rentre dans le milieu du quarré.



1°. On peut placer indifféremment le cavalier sur la case de l'un des quatre angles du quarré. On commencera à le placer ici sur la case de l'angle

D, ſuivant le modele qui m'a été communiqué par M. de Mairan; de la caſe B marquée 1, on ira à la caſe marquée 2 dans la ſeconde bande IN; de-là on placera le cavalier à la caſe marquée 3 du premier rang en dehors BD, d'où ou viendra à la caſe marquée 4 du ſecond rang IN; puis à la caſe marquée 5 du premier rang en dehors CD, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe 12, en faiſant le tour du damier, ſans ſortir des deux premieres bandes en dehors.

2°. Quand on ſera parvenu à la caſe marquée 12, on recommencera un ſecond tour du damier dans le même ſens qu'on vient de le faire. Ainſi de la caſe marquée 12, on ira à la caſe marquée 13 du premier rang BD; de 13 on viendra à 14, dans le ſecond rang IN; puis à 15; enſuite à la caſe marquée 16 du premier rang en dehors CD, & ainſi des autres, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe marquée 24, qui eſt à côté de celle par laquelle on a commencé, en faiſant en même ſens qu'auparavant le tour du damier, ſans ſortir des deux premieres bandes en dehors, vers les extrêmités du damier.

REMARQUES.

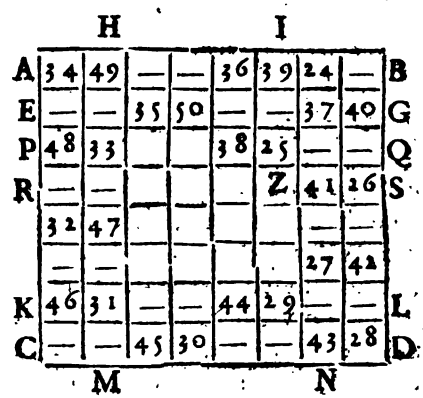
Il nous a paru que le principe fondamental de la méthode de M. Moivre, étoit de remplir d'abord les caſes des deux premieres bandes en dehors, en tournant en même ſens autour du damier, comme on vient de le pratiquer, & comme on le pratiquera encore dans la ſuite, juſqu'à ce qu'on avertiſſe qu'il faut prendre un ſens contraire en tournant autour du centre du damier.

Pour éviter la confuſion dans le quarré ſuivant,

on n'a point marqué les vingt-quatre nombres marqués dans les caſes du quarré précédent; mais à leur place on a mis des barres, pour faire connoître que ces caſes ont été parcourues par le cavalier.

3°. Quand on eſt parvenu à la caſe marquée 24, on eſt forcé d'aller à la caſe marquée 25, mais de cette caſe on ira à celle qui eſt marquée 26 de la premiere bande BD, pour faire un troiſieme tour en même ſens qu'auparavant, & continuer à remplir les caſes des deux premieres bandes en dehors, ſuivant le principe fondamental: de la caſe marquée 26, on viendra à la caſe marquée 27; puis à celle qui eſt marquée 28, enſuite à 29, & ainſi des autres, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe marquée 37, qui ſuit immédiatement dans la même diagonale la caſe marquée 1, qui eſt celle par où l'on a commencé; ce qu'il eſt à propos d'obſerver ſur le damier.

4°. De la caſe marquée 37, on ne peut aller qu'à la



caſe marquée 38 dans la troiſieme bande PQ, ou à

celle qui eſt marquée Z dans la quatrieme bande RS; mais on préférera la caſe qui eſt marquée 38 dans la bande PQ pour ſatisfaire au principe fondamental, qui eſt de faire parcourir d'abord au cavalier les deux premieres bandes en dehors; car de la caſe Z on ne peut venir dans les deux premiers rangs BD, IN, pour recommencer un quatrieme tour en même ſens que les autres; mais en portant le cavalier à la caſe marquée 38, on peut retourner à la premiere bande BD, en paſſant par la caſe marquée 39 de la premiere bande AB, & de-là à la caſe 40 de la bande BD, où l'on voit qu'on reprend le même ſens que dans les autres tours.

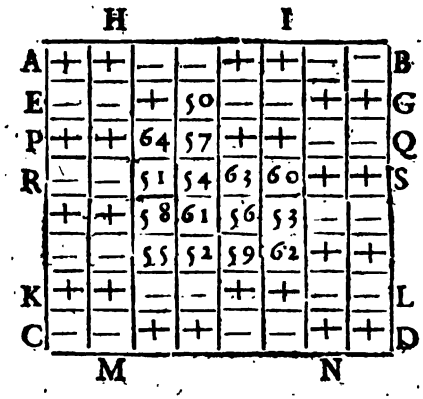
5°. Ainſi de 38 on paſſera à 39, & de 39 on viendra à la caſe qui eſt marquée 40 dans le premier rang en dehors BD, d'où l'on paſſera à la caſe marquée 41 dans la ſeconde bande IN, puiſque les autres caſes ſont remplies: on continuera à faire le tour en même ſens que les autres, ſuivant la marche du cavalier dans les deux premieres bandes en dehors, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe marquée 50 dans la ſeconde bande EG.

REMARQUE.

On a dit qu'on doit recommencer les tours en même ſens: cela doit s'entendre que le cavalier étant parvenu dans les caſes de la diagonale, où il a d'abord été placé, ou dans une caſe voiſine, il faut le placer auſſi-tôt qu'on le peut dans l'une des caſes de la premiere bande en dehors BD, & ſuivre les extrêmités du damier dans les deux premieres bandes en dehors, en allant de la bande BD en DC, de DC en CA, & de CA en AB.

Pour éviter encore la confuſion, on ne marquera pas les nombres marqués dans les quarrés précédens : on laiſſera les point du quarré précédent ; mais à la place des nombres qui y ſont, on mettra des croix, pour faire connoître que toutes ces caſes ſont remplies, c'eſt-à-dire, couvertes de jettons, ſi on ſuit la ſeconde maniere d'exécuter le problême ſur le damier, ou découvertes ſi on ſuit la premiere.

6°. Quand on ſera parvenu à la caſe marquée 50, on ne peut plus recommencer le tour en même ſens, puiſque les caſes des deux premieres bandes ſont remplies ; on en commencera un autre en ſens contraire, c'eſt-à-dire, qu'on tournera autour du centre du damier, en s'éloignant de ce centre autant qu'on le pourra, & l'on ira vers la premiere bande en dehors AC, oppoſée à la bande BD.



Ainſi de la caſe 50, on placera le cavalier à la caſe 51 ; de 51 on ira à 52 ; puis à 53, &. ainſi de

ſuite, en tournant autour du centre du damier en ſens contraire aux premiers, & en s'éloignant du centre autant qu'il ſera poſſible.

REMARQUE.

On voit que les trois derniers nombres 62, 63, 64, ſont ici diſpoſés d'une autre maniere que dans la ſolution de M. Moivre : cette différente diſpoſition vient de ce qu'on a jugé à propos de continuer depuis la caſe 50 à faire les tours en ſens contraire, afin d'établir une même regle, & de pouvoir la pratiquer dans toute l'étendue de la ſolution du problême, quoiqu'avec quelque différence.

Cette méthode a paru facile à retenir, & à exécuter, quand on y ſera quelque attention.

PROBLEMES DE GEOMETRIE.

LA géométrie n'eſt pas moins féconde que l'arithmétique ; mais elle n'eſt pas ſi aiſée dans ſes opérations, ni par conſéquent ſi agréable dans la réſolution de ſes problêmes : c'eſt pourquoi je ne mettrai que ceux qui me paroîtront les plus faciles & les plus agréables.

PROBLEME I.

Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par l'une de ſes extrêmités.

I.

Pl. 1 ; Fig. 3. POur élever une perpendiculaire à la ligne donnée AB, par ſon extrêmité A, mettez à l'extrêmité A une des pointes du compas ouvert à volonté, & prenez ſur cette ligne AD prolongée, s'il eſt néceſſaire, trois parties égales AC, CD, DB, dont la derniere DB ſe termine ici par hazard à l'autre extrêmité B de la ligne donnée AB. Décrivez de l'intervalle CB des deux dernieres parties, & par leurs extrêmités B, C, deux arcs de cercle, qui ſe coupent au point E : puis des deux points E, C, & avec la même ouverture du compas décrivez deux autres arcs de cercle, qui ſe coupent ici au point F. Par ce point F, & par

l'extrêmité donnée A, vous tirerez la droite AF, qui ſera perpendiculaire à la ligne propoſée AB. Pl. 1; fig. 3.

II.

Si vous voulez tirer, par l'autre extrêmité B de la même ligne donnée AB, une ligne qui lui ſoit en même tems égale & perpendiculaire, diviſez la ligne AB en trois parties égales aux points C, D. Puis ayant trouvé le point F, comme il vient d'être enſeigné, décrivez de l'extrêmité donnée B, & de l'intervalle AF, l'arc de cercle GHI, & portez ſur cet arc la même ouverture du compas deux fois de G en H, & de H en I. Décrivez avec la même ouverture du compas & des deux points H, I, deux arcs de cercle qui ſe coupent ici au point K. Enfin menez la droite BK, elle ſera égale & perpendiculaire à la ligne propoſée AB.

* Voyez le problême III ſuivant.

PROBLEME II.

Mener par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.

I.

POur mener par le point donné C une ligne parallele à la ligne donnée AB, prenez à volonté ſur cette ligne AB, deux points proche des deux extrêmités A, B, comme D, E: puis du point donné C & de l'intervalle DE, décrivez un arc de cercle vers F; enſuite du point E & de l'intervalle CD, décrivez un autre arc de cercle, qui rencontre ici le premier au point F. Par ce point F, & par le point donné C, vous menez la droite CF, qui ſera parallele à la propoſée AB. Fig. 4.

II.

Si vous voulez que la ligne parallele ſoit égale à la ligne AB, au lieu de vous ſervir des deux points D, E, ſervez-vous des deux extrêmités A, B. Du point donné C, & de l'intervalle de la ligne donnée AB, décrivez un arc de cercle vers G: puis de l'extrêmité B, & de l'intervalle AC, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier en G. Par ce point G, où ces deux arcs ſe coupent, & par le point donné C, menez la droite CG, elle ſera égale & parallele à la propoſée AB.

PROBLEME III.

Diviſer d'une même ouverture de compas une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra.

Pl. 1, f. 4 & 5. SI vous voulez diviſer la ligne donnée AB en quatre parties égales, prolongez-la autant qu'il eſt néceſſaire, comme ici juſqu'en E, en ſorte que AB, BC, CD, DE, ſoient quatre parties égales chacune à AB. Faites ſur ces parties les quatre triangles équilatéraux ABF, BCG, CDH, DEI; ce qui peut ſe faire avec la même ouverture de compas. Enfin menez les droites AG, AH, AI: alors la ligne HM repréſentera une des quatre parties de la ligne AB, la ligne DM en repréſentera par conſéquent trois, & la ligne FK ou BK en repréſentera deux.

Mais la ſeule ligne AI ſuffit: car elle retranche la ligne B1, égale à la quatrieme partie de la ligne AB, la ligne C2 égale à la moitié de la même ligne AB, & la ligne D3, égale aux trois quarts de la même ligne AB.

La

La ligne AH ſert pour diviſer la ligne propoſée AB en trois parties égales; car la ligne GL en repréſente une, & la ligne CL en repréſente par conſéquent deux. Mais la même ligne AI ſuffit auſſi pour la diviſion de la ligne donnée AB en trois parties égales, parce que la ligne BN en repréſente une, & la ligne CO en repréſente deux. D'où il ſuit que la ligne HO en repréſente auſſi une.

PROBLEME IV.

Faire un angle qui ſoit la moitié, ou le double d'un angle donné.

PRemierement, pour faire un angle ADG, qui ſoit la moitié de l'angle donné ABC; de ſon ſommet B comme centre, & de l'intervalle BD pris à volonté ſur l'un des côtés AB prolongé à diſcrétion, décrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point D & par le point E, où le demi-cercle coupe l'autre côté BC de l'angle donné, menez la ligne DG: l'angle ADG ſera la moitié de l'angle donné ABC. Pl. 3, fig. 6.

Secondement, pour faire un angle ABC, qui ſoit double de l'angle donné ADG; d'un point B comme centre pris à volonté ſur l'un des côtés AD, & de l'intervalle BD diſtance de B, juſques au ſommet D de l'angle donné, décrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point B & par le point E, où le demi-cercle coupe l'autre côté de l'angle donné, menez la ligne BC: l'angle ABC ſera double de l'angle donné ADG.

PROBLEME V.

Faire un angle qui ſoit le tiers, ou le triple d'un angle donné.

Pl. 3, fig. 7. PRemierement, pour faire un angle égal à la troiſieme partie de l'angle donné ABC, de ſon ſommet B comme centre, & de l'intervalle BD pris à volonté, décrivez le demi-cercle DEF; puis appliquez une regle bien droite au point E; en ſorte que ſa partie GI, terminée par la circonference du demi-cercle DEF, & par la ligne AD prolongée, ſoit égale au demi-diametre BD, ou BE. Après cela menez la droite GE, qui fera au point G, l'angle AGH égal à la troiſieme partie de l'angle ABC. L'arc ID ſera auſſi égal à la troiſieme partie de l'arc EF, qui meſure l'angle donné ABC.

Secondement, pour faire un angle égal au triple de l'angle donné AGH; ayant pris à diſcrétion ſur la ligne GH, le point I, portez la longueur IG ſur la ligne AG, de I en B, pour décrire du point B, & de l'intervalle IB, le demi-cercle DEF, qui paſſera par le point I, & donnera ſur la ligne GH le point E. Par ce point E & par le point B, vous tirerez la droite BE, qui fera l'angle ABC, triple du donné AGH.

PROBLEME VI.

Trouver à deux lignes données une troiſieme, & autant d'autres proportionnelles qu'on voudra.

Fig. 8. POur trouver aux deux lignes données AB, AC, une troiſieme proportionnelle, décrivez

de l'extrêmité B de la premiere AB, par l'autre extrêmité A, l'arc de cercle AF, ſur lequel ayant mis la longueur de la ſeconde AC, de A en F, portez la même longueur ſur la ligne AC, prolongée autant qu'il ſera beſoin de F en D, & la ligne AD ſera troiſieme proportionnelle aux deux lignes données AB, AC.

De même pour trouver aux trois lignes AB, AC, AD, une quatrieme proportionnelle, ou ce qui eſt la même choſe, aux deux AC, AD, une troiſieme proportionnelle, décrivez de l'extrêmité C de la premiere AC, par l'autre extrêmité A, l'arc de cercle AG, ſur lequel ayant mis la longueur de l'autre ligne AD, de A en G, portez la même longueur AD ſur la ligne AD prolongée, de G en E, & la ligne AE ſera celle qu'on cherche: & ainſi de ſuite.

PROBLEME VII.

Décrire ſur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les aires ſoient égales.

SI la ligne donnée eſt AB, tirez à diſcrétion la parallele CD, ſur laquelle ayant pris à volonté autant de points différens que vous voudrez de triangles égaux, comme E, F, G, pour trois triangles, menez de ces trois points E, F, G, aux extrêmités A, B, de la ligne donnée AB, des lignes droites, & vous aurez les trois triangles égaux AEB, AFB, AGB, ſur la même baſe AB. Pl. 3, fig. 9.

PROBLEME VIII.

Décrire ſur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les contours ſoient égaux.

Pl. 3, fig. 10. SI la baſe donnée eſt AB, diviſez-la en deux également au point C, & prolongez-la de part & d'autre à volonté en D, & en E, en ſorte que les deux lignes CD, CE, ſoient égales entre elles. Toute la ligne DE ſera priſe pour la ſomme des deux côtés de chaque triangle, qu'on décrira ſur la baſe donnée AB en cette ſorte.

Decrivez du point A, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AD, un arc de cercle vers F. Puis ayant porté cette ouverture ſur la ligne DE, de D en I, décrivez du point B, & de l'intervalle IE, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point F. Ce ſera le ſommet du premier triangle ABF.

Décrivez pareillement du point A, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AF, un arc de cercle vers G. Puis ayant porté cette ouverture ſur la ligne DE, de D en K, décrivez du point B, & de l'intervalle KE, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point G. Ce ſera le ſommet du ſecond triangle AGB, dont le contour ſera égal au contour du premier AFB.

Si vous voulez un troiſieme triangle, décrivez encore du point A un arc de cercle vers H, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AG. Puis ayant porté, comme auparavant, cette ouverture ſur la ligne DE, de D en L, décrivez du point B, & de l'intervalle LE un autre arc de

cercle, qui coupe ici le premier au point H. Ce ſera le ſommet du troiſieme triangle AHB, dont le contour ſera le même que celui des deux précédens. Ainſi des autres.

Vous remarquerez que les ſommes F, G, H, de tous ces triangles, ſe trouvent ſur la circonférence d'une ellipſe, dont le grand axe eſt DE, & les deux foyers ſont A, B.

PROBLEME IX.

Décrire deux triangles iſoſceles différens, de même aire & de même contour.

AYant préparé un échelle IK, diviſée en autant de parties égales qu'il conviendra, prenez ſur la baſe AB, les deux ſegmens GA, GB, chacun de 12 parties priſes ſur l'échelle; élevez au point G ſur la même baſe AB la perpendiculaire GC de 35 des mêmes parties; tirez les deux lignes égales AC, BC, & vous aurez le premier triangle iſoſcele ACB, dont chacun des côtés égaux AC, BC, ſe trouvera de 37 parties, comme on le connoîtra en ajoûtant le quarré 144 du ſegment AG, avec le quarré 1225 de la perpendiculaire CG, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 1369. Pl. 3, fig. 11.

Pour avoir un triangle de même aire & de même contour que le précédent, prenez ſur la baſe DE, les deux ſegmens HD, HE, chacun de 20 parties, & ayant élevé au point H ſur la baſe DE la perpendiculaire HF de 21 parties, tirez les lignes égales EF, DF, dont chacune ſe trouvera de 29 parties, comme on le connoîtra en ajoûtant le quarré 400 du ſegment DH, avec le quarré 441

de la perpendiculaire HF, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 841.

Ainſi vous aurez le triangle iſoſcele DEF, dont le contour 98 eſt égal au contour, c'eſt-à-dire, à la ſomme des trois côtés du premier triangle iſoſcele ABC, & dont l'aire, ou le contenu 420 eſt égal au contenu du premier triangle iſoſcele ABC, comme on le connoît, en multipliant DH par FH, ou 20 par 21 : car le produit 420 qui en vient pour l'aire du triangle DEF, eſt le même que celui qui vient en multipliant AG par CG, ou 12 par 35, pour l'aire du triangle ABC.

On peut décrire autant de couples qu'on voudra de triangles iſoſceles de même aire & de même contour, en trouvant en nombres ces couples; ce qui ſe peut faire en cherchant les deux nombres générateurs des moitiés ACG, DFH, qui ſont deux triangles rectangles égaux. Ces nombres générateurs connus ſerviront à en trouver d'autres, par le moyen deſquels on trouvera deux triangles rectangles, comme il a été enſeigné au *problême IX d'arithméthique*, *pag.* 59. Voici la méthode de trouver les nombres générateurs des deux triangles rectangles ACG, DFH, qui eſt générale pour tout autre triangle rectangle, dont on connoît les trois côtés, ou au moins deux.

Pour trouver les nombres générateurs du triangle ACG, ajoutez l'hypoténuſe 37 à l'un des côtés 12, vous aurez le quarré 49, dont la racine eſt 7, que vous garderez. Ajoutez encore l'hypoténuſe 37 à l'autre côté 35, pour avoir une ſomme 72, dont la moitié 36 a pour racine quarrée 6, qui eſt un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 6 à 7, & vous aurez 1 pour l'autre nombre générateur du triangle ACG.

Il faut ſuivre la même opération pour trouver les nombres générateurs du triangle DFH : ajoutez l'hypoténuſe 29 au côté 20, vous aurez encore le quarré 49, dont la racine eſt 7, que vous garderez ; ajoutant encore la même hypoténuſe 29 à l'autre côté 21, vous aurez 50, dont la moitié 25 a pour racine quarrée 5, qui eſt un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 5 à 7, & vous aurez 2 pour l'autre nombre générateur du triangle DFH.

Ainſi les nombres générateurs du triangle ACG, ſont 6, 1 : & les nombres générateurs du triangle DFH ſont 5, 2.

A préſent *pour avoir autant qu'on voudra de couples de triangle de même aire & de même contour*, il faut multiplier les nombres générateurs 6, 1, 5, 2, par un même nombre tel qu'il plaira : ſi on les multiplie par 2, on aura 12, 2, & 10, 4 pour nombres générateurs de deux autres triangles rectangles de même aire : car multipliant 12 par 2, on aura 24, dont le double 48 ſera AG, un des côtés du nouveau triangle ; puis ajoutant 144, 4 quarrés de 12, 2, on aura la ſomme 148 pour l'hypoténuſe AG. Enfin ôtant 4, quarré de 2, de 144, quarré de 12, on aura 140 pour l'autre côté CG : ainſi le triangle rectangle ACG, dont les côtés étoient 37, 35, 12, ſe trouvera tranſformé en un autre, dont les côtés ſeront 148, 140, 48. *Pour avoir un triangle iſoſcele*, il ne faut que prolonger la baſe AG juſqu'en B, faire GB égale à AG, qui eſt ici de 48 parties, & tirer la ligne CB, qui ſera de 148 parties comme AC. Ce triangle iſoſcele ainſi ſuppoſé, aura 392 parties de contour & 6720 de ſuperficie.

De même pour avoir l'autre nouveau triangle,

dont les nombres générateurs ſont 10, 4, on multipliera 10 par 4, & l'on aura 40, dont le double 80 ſera le côté DH; enſuite ajoutant 100 & 16, quarrés de 10, 4, on aura 116 pour l'hypoténuſe DF, & ôtant 16, quarré de 4, de 100, quarré de 10, on aura 84 pour l'autre côté FH: ainſi le triangle rectangle DFH, dont les côtés étoient 29, 21, 20, ſe trouvera transformé en un autre, dont les côtés ſeront 116, 84, 80. Pour achever le triangle iſoſcele, il ne faut que prolonger DH juſqu'en E, en faiſant DE égale à DH; qui eſt ici de 80 parties, & tirer la ligne FE, qui ſera de 116 parties, comme DF. Ce nouveau triangle iſoſcele aura 392 parties de contour, & 6720 de ſuperficie: par conſéquent il ſera de même aire & de même contour que l'autre.

On peut s'exercer, en multipliant les nombres générateurs 6, 1: 5, 2, par un tel autre nombre qu'on voudra.

PROBLEME X.

Décrire trois différens triangles rectangles, dont les aires ſoient égales.

Pl. 4, fig. 12. AYant préparé une échelle diviſée en parties égales, prenez la baſe AB de 42 parties, & la hauteur ou perpendiculaire AC de 40; l'hypoténuſe BC du premier triangle rectangle ABC ſe trouvera de 58 parties, comme on le connoîtra en ajoutant le quarré 1764 de la baſe AB, au quarré 1600 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 3364.

Prenez enſuite la baſe DE du ſecond triangle rectangle DEF de 70 parties, & la hauteur DF de

24; l'hypoténuſe EF ſe trouvera de 74 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble le quarré 4900 de la baſe DE, & le quarré 576 de la hauteur DF, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 5476. L'aire de ce ſecond triangle rectangle DEF ſera égale à celle du premier ABC, chacune étant 840, comme on le connoît en multipliant la baſe par la hauteur, & en prenant la moitié du produit.

Enfin prenez la baſe FG du troiſieme triangle rectangle FGH, de 112 parties, & la hauteur FH de 15; l'hypoténuſe BC ſe trouvera de 113 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble le quarré 12544 de la baſe FG, le quarré 225 de la hauteur FH, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 12769. L'aire de ce troiſieme triangle rectangle FGH ſera auſſi 840.

Ces trois triangles rectangles ont été trouvés en nombres entiers, par ce canon que nous avons tiré de l'algébre, qui nous apprend que pour trouver en nombres entiers, trois triangles rectangles égaux, on doit auparavant trouver trois nombres qui ſerviront de nombres générateurs, en cette ſorte.

Si on ajoute le produit de deux nombres quelconques à la ſomme de leurs quarrés, on aura le premier nombre. La différence de leurs quarrés ſera le ſecond: & la ſomme de leur produit & du quarré du plus petit, ſera le troiſieme nombre générateur.

Si de ces trois nombres ainſi trouvés, on forme trois triangles rectangles, ſçavoir, l'un des deux premiers, l'autre des deux extrêmes, & le troiſieme du premier & de la ſomme des deux autres, ces trois triangles rectangles ſeront égaux entr'eux.

* Voyez le probl. IX d'Arithm. p. 50.

On peut trouver en nombres rompus autant d'autres triangles rectangles qu'on voudra, dont les aires ſeront égales entr'elles & à l'un des trois précédens, en trouvant par le moyen de ce triangle rectangle un autre triangle rectangle égal, en cette ſorte.

Formez de l'hypoténuſe du triangle rectangle propoſé, & du quadruple de ſon aire, un autre triangle rectangle, que vous diviſerez par le double du produit, qui viendra en multipliant l'hypoténuſe du triangle rectangle propoſé par la différence des quarrés des deux autres côtés du meme triangle rectangle, & vous aurez un triangle rectangle égal au propoſé.

PROBLEME XI.

Décrire trois triangles égaux, dont le premier ſoit rectangle, le ſecond ſoit acutangle, & le troiſieme ſoit obtuſangle.

Pl. 4, fig. 13. AYant préparé, comme auparavant, une échelle diviſée en parties égales, qui peuvent repréſenter des pieds, des toiſes, & tout ce qu'il vous plaira, prenez la baſe AB du triangle rectangle ABC de 24 parties, & la hauteur AC de 7; l'hypoténuſe BC ſe trouvera de 25 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble le quarré 576 de la baſe AB, & le quarré 49 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 625.

Prenez enſuite ſur la baſe DE du triangle acutangle DEF, le ſegment KD de 5 parties, & le ſegment KE de 9; élevez du point K ſur la baſe DE, la perpendiculaire KF de 12 parties: alors

le côté DF ſe trouvera de 13 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble le quarré 25 du ſegment DK, & le quarré 144 de la hauteur FK, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 169. L'autre côté ſe trouvera de 15 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble le quarré 81 du ſegment KE, & le quarré 144 de la perpendiculaire KF, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 225.

Enfin prenez ſur la baſe GH du triangle obtuſangle GHI, le ſegment LG de 6 parties, & le ſegment LH de 15; élevez du point L, ſur la baſe GH, la perpendiculaire LI de 8 parties, alors le côté GI ſe trouvera de 10 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble le quarré 36 du ſegment GL, & le quarré 64 de la hauteur IL, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 100. Le côté HI ſe trouvera de 17 parties, comme on le connoîtra en ajoutant au quarré 225 du ſegment LH, le quarré 64 de la perpendiculaire LI, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 289.

On connoît que le triangle ABC eſt rectangle en A, parce que la ſomme 625 des quarrés 49, 576, des deux côtés AC, AB, eſt égale au quarré du troiſieme côté BC: que le triangle DEF, eſt acutangle, parce que la ſomme des quarrés de deux côtés quelconques eſt plus grande que le quarré du troiſieme côté: enfin que le triangle GHI eſt obtuſangle, & que l'angle I eſt obtus, parce que le quarré 441 de ſon côté oppoſé GH, qui eſt de 21 parties, eſt plus grand que la ſomme 389 des quarrés 100, 289, des deux autres côtés GI, HI.

Enfin on connoît que ces trois triangles ABC, DEF, GHI, ſont égaux, c'eſt-à-dire, que leurs

aires ſont égales, parce qu'en multipliant la baſe AB par la hauteur AC, il vient le même produit qu'en multipliant la baſe DE par la hauteur FK, ou la baſe GH par la hauteur LI, ſçavoir 168, qui eſt le double de l'aire de chaque triangle, laquelle par conſéquent ſera 84. La perpendiculaire FK, & les trois côtés du triangle acutangle DEF, ſont dans une proportion continue arithmétique.

PROBLEME XII.

Trouver une ligne droite égale à ſon arc de cercle donné.

Pl. 4, fig. 14. POur trouver une ligne droite égale à l'arc de cercle BCD, dont le centre eſt A, & le rayon ou demi-diametre eſt AB, ou AD, diviſez* cet arc en deux également au point C. Tirez les cordes BC, CD, BD. Prolongez la corde BD en E, en ſorte que la ligne BE ſoit double de l'une des deux cordes égales BC, CD, c'eſt-à-dire, égale à la ſomme de ces deux cordes. Prolongez encore la ligne BE en F, en ſorte que la ligne EF ſoit égale à la troiſieme partie de la ligne DE,* & la ligne droite BF ſera à peu près égale à la courbe BCD. J'ai dit à peu près, parce que la ligne BF eſt tant ſoit peu moindre que l'arc BCD; mais la différence eſt ſi petite, lorſque l'arc BCD ne paſſe pas 30 degrés, qu'il ne s'en faut pas une partie de cent mille qu'on peut donner au rayon AB, ou AD.

* Voyez le probl. III, p. 202.

REMARQUE.

Si l'arc BCD eſt préciſément de 30 degrés, ou la douzieme partie de la circonférence de tout le

cerle, & que le rayon AB, ou AC ſoit de 50000 parties, on connoîtra par la trigonométrie que chacune des deux cordes BC, CD, eſt de 13053 parties. Ainſi leur ſomme, ou la ligne BE ſera de 26106 parties, de laquelle ôtant la corde BD, qui ſe trouvera de 25882 parties, il en reſtera 224 pour la ligne DE, dont la troiſieme partie eſt 74 pour la ligne EF. Cette troiſieme partie étant ajoutée à la ligne BE, ou à 26106, la ſomme ſera 26180 pour la ligne BF, ou pour l'arc BCD. Enfin multipliant cet arc, ou 26180 par 12, on aura 314160 pour la circonférence du cercle. Ainſi nous ſçavons que quand le diametre d'un cercle eſt de 100000 parties, la circonférence eſt d'environ 314160 ſemblables parties, & par conſéquent que le diametre d'un cercle eſt à ſa circonférence à peu près comme 100000 eſt à 314160, ou comme 10000 à 31416.

Ce rapport ſert à *trouver la circonférence d'un cercle, dont on connoît le diamétre.* Il faut multiplier ce diametre par 31416, & diviſer le produit par 10000. Cette diviſion ſe fera en retranchant de ce produit quatre figures à la droite : les figures qui reſteront à la gauche, feront connoître la circonférence du cercle, & les figures retranchées ſeront le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur ſera 10000.

Pour connoître la circonférence d'un baſſin rond d'un jet d'eau, dont le diametre eſt, par exemple, de 64 pieds, on multiplera 64 par 31416, on retranchera quatre figures à la droite du produit 2010624, & l'on aura 201 pieds $\frac{624}{10000}$, pour la circonférence qu'on cherche.

Il faudra faire tout le contraire, ſi on veut *connoître le diametre d'un cercle, ou d'une boule*

par ſa circonférence connue, c'eſt-à-dire, qu'il faudra multiplier cette circonférence par 100000; ce qui ſe fera en lui ajoutant vers la droite quatre zeros, & l'on diviſera le produit par 31416.

Ainſi pour connoître le diametre d'une tour ronde, dont on ſçait que le contour ou la circonférence meſurée en dehors par le moyen d'une longue corde, eſt de 154 pieds, on ajoutera quatre zeros à la droite de ce nombre 154, on diviſera 1540000 par 31416, & l'on aura 49 pieds $\frac{616}{31416}$ pour le diametre qu'on cherche.

PROBLEME XIII.

Trouver entre deux lignes données, une, ou deux, ou trois moyennes proportionnelles.

I.

Pl. 4, fig. 15. PRemierement, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, une moyenne proportionnelle, partagez la plus grande AB en deux parties égales au point E. De ce point E, comme centre & de l'intervalle AE, ou EB, décrivez le demi-cercle ADB; portez enſuite de A en C la plus petite ligne AC: élevez au point C la perpendiculaire CD, & menez la droite AD, qui ſera moyenne proportionnelle entre les deux AB, AC.

II.

Fig. 16. En ſecond lieu, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, deux moyennes continuèment proportionnelles, faites de ces deux lignes données

AB, AC, le parallelogramme rectangle ABCD; puis décrivez de ſon centre E, l'arc de cercle GHF de telle grandeur que la droite FG, qui ſera tirée par les deux points F, G, où il coupe les deux lignes données AC, AB, prolongées, paſſe par le ſommet D de l'angle droit du parallelogramme. Alors les deux lignes CF, BG, ſeront les deux moyennes proportionnelles, qu'on cherche. De ſorte que les quatre lignes AB, CF, BG, AC, ſeront continuement proportionnelles. Pl. 4, fig. 16.

III.

Enfin, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, trois moyennes continuement proportionnelles, après avoir trouvé entre ces deux lignes données AB, AC, une moyenne proportionnelle AD, comme il a été enſeigné, *cherchez de la même façon entre cette moyenne AD, & la premiere AC, une autre moyenne proportionnelle AF, & entre la même moyenne AD & la dernierere AB, une autre moyenne proportionnelle AG. Les trois lignes AF, AD, AG, ſeront les moyennes proportionnelles qu'on cherche: de ſorte que les cinq lignes AC, AF, AD, AG, AB, ſeront dans une proportion continue. Fig. 15. *Art. I.

REMARQUES.

Si les deux lignes AB, AC, ſont données en nombres, comme ſi AB étoit de 32 pieds, & AC, de 2, on pourra exprimer en nombres les trois moyennes AF, AD, AG, en multipliant enſemble les deux nombres 32 & 2, des deux lignes données AB, AC, & en prenant la racine quarrée du produit 64, qui donnera 8 pour la moyenne

AD, laquelle étant multipliée ſéparément par la premiere AC, & par la derniere AB, les racines quarrées des deux produits 16, 256, donneront 4 pour AF, & 16 pour AG.

Fig. 16. Mais pour trouver en nombres ſeulement deux moyennes proportionnelles entre les deux propoſées AB, AC, telles que ſont les deux CF, BG, en ſuppoſant que la plus petite AB ſoit de deux pieds, & la plus grande AC de 16; multipliez le quarré 4 de la premiere AB par la derniere AC, & prenez la racine cubique du produit 64, qui donnera 4 pour CF, premiere des deux moyennes proportionnelles cherchées. De même multipliez le quarré 256 de la derniere AC, par la premiere AB, & prenez la racine cubique du produit 512, qui donnera 8 pour l'autre moyenne proportionnelle BG.

PROBLEME XIV.

Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui ſe touchent mutuellement, & qui touchent auſſi la circonférence du cercle donné.

Pl. 4, fig. 17. AYant diviſé le cercle donné ABCD, dont le centre eſt E, en quatre parties égales par les deux diametres perpendiculaires AC, BD, prenez ſur le diametre BD, la ligne DF, égale à la ligne CD, qui eſt la ſoutendante ou la corde du quart de cercle. La ligne EF ſera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte la longueur de cette ligne EF ſur les extrêmités des diametres perpendiculaires AC, BD, en AK, BG, CH, DI, & que des centres K, G, H, I, on décrive par les points

points A, B, C, D, quatre circonférences de cercles, elles ſe toucheront mutuellement, & elles toucheront auſſi celle du cercle donné ABCD.

REMARQUE.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme I, K, par la ligne droite IK, cette ligne droite IK ſera parallele à ſa corde correſpondante DA, & paſſera par le point d'attouchement O : elle fera auſſi en I un angle demi-droit, ou de 45 degrés, avec le diametre BD ; d'où il ſuit que l'arc LO ſera de 45 degrés, auſſi bien que l'arc MO, & que tout l'arc LM eſt un quart de cercle.

Si on joint la droite CF, l'angle ECF ſera de 22 degrés 30 minutes ; d'où l'on peut tirer une autre conſtruction pour la réſolution du problême.

PROBLEME XV.

Décrire dans un demi-cercle donné trois cercles qui touchent la circonférence & le diametre de ce demi-cercle donné, & dont celui du milieu, qui eſt le plus grand, touche les deux autres, qui ſont égaux.

ELevez du centre D du demi-cercle donné ABC, ſur ſon diametre AC, la perpendiculaire DB, & diviſez-la en deux également au point E. Ce point ſera le centre du cercle BIDK, le plus grand des trois qu'on cherche. Plan. 5. fig. 18.

Pour décrire les deux autres cercles, qui ſont égaux entre eux, diviſez le demi-diametre DE en deux également au point H ; puis de l'intervalle BH, & des deux points E, D, comme centres,

décrivez de part & d'autre deux arcs de cercle, qui ſe coupent ici en F & G. Ces deux points F, G, ſeront les centres des deux cercles égaux, qu'il ne ſera pas difficile de décrire, parce que le rayon de chacun eſt égal à la ligne DH, ou à la quatrieme partie du diametre BD, ou bien, ce qui eſt la même choſe, à la huitieme partie du grand diametre AC.

REMARQUE.

Il eſt évident que le demi-cercle ABC eſt double du cercle BIDK; le diametre AC étant double du diametre BD, & que le demi-cercle BID, eſt auſſi double du cercle LOI, le rayon DE étant double du rayon FI, ou FL. D'où il eſt aiſé de conclure que le triangle mixtiligne ABID eſt égal au demi-cercle BDI, & par conſéquent que le demi-cercle ABC ſe trouve diviſé en quatre parties égales par le diametre BD, & par la circonférence BIDK.

PROBLEME XVI.

Décrire quatre cercles proportionnels, enſorte que leur ſomme ſoit égale à un cercle donné, & que la ſomme de leurs rayons ſoit égale à une ligne donnée.

Plan. 5. fig. 19. SOit ABCD le cercle donné, dont le point O eſt le centre, & AC un diametre. Soit AE la ligne donnée qui doit être plus grande que le rayon AO, & moindre que le diametre AC, ſi l'on veut que les quatre cercles qu'on cherche, ſoient inégaux. Les diametres de ces quatre cercles ſe détermineront en cette ſorte.

Ayant tiré à volonté dans le cercle donné ABCD la ligne FG, parallele au diametre AC, & ayant retranché de la ligne donnée AE la partie EH, égale à la moitié de la ligne FG, élevez à l'extrêmité A du diametre AC, la ligne AI, faites la égale à AH, & perpendiculaire * au diametre AC, & menez par le point I la ligne IB parallele au diametre AC : cette parallele IB rencontre ici la circonférence du cercle donné au point B. Par ce point B, tirez la ligne BD, perpendiculaire à * la ligne FG. Les quatre lignes KF, KB, KG, KD, ſeront les diametres des quatre cercles qu'on cherche.

*Pr. 1. p. 172.

REMARQUE.

Il arrivera que les deux plus petits cercles KF, KB, ſeront égaux entr'eux, auſſi bien que les deux plus grands KG, KD, lorſque la ligne FG ſera égale à la ligne donnée AE. Ainſi quand on voudra que tous ces quatre cercles ſoient inégaux, on doit tirer la ligne FG plus grande ou plus petite que la ligne donnée AE : alors le cercle KF ſera le plus petit de tous, & le cercle KD ſera le plus grand.

PROBLEME XVII.

Déterminer ſur la circonférence d'un cercle donné un arc dont le ſinus ſoit égal à la corde du complément de cet arc.

POur déterminer ſur la circonférence du quart de cercle ABC, dont le centre eſt A, l'arc CD, dont le ſinus ED ſoit égal à la corde BD du complément de cet arc, élevez à l'extrêmité B

Plan. 6. fig. 10.

du rayon AB, la perpendiculaire BG, égale à la corde BC du quart de cercle, & tirez du centre A par le point G, la droite AG : puis ayant pris ſur le rayon AB, la partie AF égale à la partie GH, élevez au point F ſur AB, la perpendiculaire FD, qui déterminera l'arc CD qu'on cherche.

REMARQUE.

La ſécante AG de l'arc BH eſt égale à la tangente d'un arc de 60 degrés, c'eſt-à-dire que le rayon AH étant de 100000 parties, la ligne AG en comprend 173205, de laquelle ôtant AH, ou 100000, le reſte 73205 eſt la partie GH, ou AF, c'eſt-à-dire, le ſinus ED de l'arc CD, qui ſe trouvera de 47°, 3′, 31″, & par conſéquent ſon complément BD de 42°, 56′, 29″. Ainſi nous ſçavons que le ſinus d'un arc de 47°, 3′, 31″, eſt égal à la corde d'un arc de 42°, 56′, 29″, qui eſt ſon complément.

PROBLEME XVIII.

Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés ſoient en progreſſion géométrique.

Plan. 6. fig. 21. AYant décrit à volonté le demi-cercle ABC, dont le centre eſt D, & dont le diametre AC ſera pris pour l'hypotenuſe du triangle rectangle qu'on cherche, tirez par l'extrêmité C de ce diametre AC, la ligne CE, égale & perpendiculaire au même diametre AC. Joignez la droite DE qui ſe trouve ici coupée par la circonférence du demi-cercle ABC au point F. Portez la longueur de la partie EF ſur la circonférence ABC,

de A en B, & joignez les droites AB, BC, qui feront au point B un angle droit. Le triangle rectangle ABC ſera celui qu'on cherche ; de ſorte qu'il y aura même raiſon du côté AB, au côté BC, que du même côté BC, à l'hypotenuſe AC. Plan. 6. fig. 21.

REMARQUE.

Si de l'angle droit B, on mene la ligne BG perpendiculaire à l'hypotenuſe AC, le plus grand ſegment CG ſera égal au plus petit côté oppoſé AB, ou à la partie EF. De-là on peut tirer cette autre conſtruction pour la réſolution du problême. Prenez ſur le diametre AC, la partie CG égale à la partie EF, & abaiſſant du point O la perpendiculaire GB, elle coupera la circonférence ABC au point B ; d'où l'on menera les lignes AB, BC, qui formeront le triangle rectangle cherché.

On aura une troiſieme conſtruction, ſi l'on conſidere que l'hypotenuſe AC ſe trouve coupée au point G par ſa perpendiculaire BG, en moyenne & extrême raiſon, c'eſt-à-dire, que l'hypotenuſe AC eſt à ſon plus grand ſegment CG, comme le même plus grand ſegment CG eſt au plus petit AG.

Si vous voulez une quatrieme conſtruction, abaiſſez de l'extrêmité A, la ligne AG perpendiculaire au diametre AC, & égale à la troiſieme partie du même diametre AC, & tirez par le point G au diametre AC, la parallele GH : cette ligne GH ſera égale à la troiſieme partie du petit ſegment AG.

PROBLEME XIX.

Décrire quatre cercles égaux qui ſe touchent mutuellement, & qui touchent par le dehors la circonférence d'un cercle donné.

Plan. 6, fig. 22. AYant diviſé le cercle donné ABCD en quatre parties égales par les deux diametres AC, BD, qui ſe coupent à angle droit au centre E, prenez ſur le diametre AC prolongé la ligne AF égale à la ligne AB, ou à la corde du quart de cercle. La ligne EF donnera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte cette longueur EF ſur chacun des deux diametres prolongés AC, BD, depuis la circonférence du cercle donné ABCD aux points G, H, I, K, & que de ces points, G, H, I, K, comme centres, on décrive, par les points A, B, C, D, autant de cercles égaux, ces quatre cercles ſe toucheront mutuellement, & toucheront auſſi la circonférence du cercle donné ABCD.

REMARQUE.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme GH, par la droite GH, cette ligne GH ſera parallele à la corde correſpondante AB, & elle paſſera par le point d'atouchement O. Elle fera par conſéquent aux points G, H, des angles demi-droits, ou de 45 degrés; ce qui fait que chacun des arcs AG, BO, ſera auſſi de 45 degrés. D'où il eſt aiſé de conclure, qu'en prolongeant de part & d'autre la corde AB en M & en N, chacun des arcs AM, BN, ſera un quart de cercle.

PROBLEME XX.

Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés ſoient en progreſſion arithmétique.

MArquez ſur la ligne indéfinie AB, cinq parties égales de telle grandeur qu'il vous plaira, de A en B, & prenant la ligne determinée AB pour l'hypotenuſe du triangle rectangle qu'on cherche, décrivez de ſon extrêmité A, à l'ouverture de trois parties, un arc de cercle, & de l'autre extrêmité B, à l'ouverture de quatre parties un autre arc de cercle qui coupera le premier en un point C, d'où vous tirerez aux deux extrêmités A, B, de l'hypotenuſe AB, les droites AC, BC. Le triangle ABC, ſera rectangle en C, & ſes trois côtés AB, BC, AC, ſeront en proportion arithmétique, c'eſt-à-dire, qu'ils ſe ſurpaſſeront également, puiſque le côté AB eſt de 5 parties, le côté BC de 4, & le côté AC de 3. Plan. 7. fig. 23.

REMARQUE.

Ce triangle rectangle eſt ſeul de ſon eſpece, dont les trois côtés ſoient arithmétiquement proportionnels. Ils ſont tels, que la ſomme de leurs cubes en nombres eſt un cube parfait; car AB étant 5, ſon cube eſt 125, BC étant 4, ſon cube eſt 64, & AC étant 3, ſon cube eſt 27, & la ſomme 216 de ces trois cubes 125, 64, 27, a pour racine cubique 6, qui dans ce triangle rectangle ſe rencontre égale à ſon aire.

Si on double tous les côtés du triangle ABC, en ſorte que le côté AB ſoit de 10 parties, le côté Fig. 24.

BC de 8, & le côté AC de 6, on aura un autre triangle rectangle ſemblable au précédent. Ses trois côtés ſeront encore en proportion arithmétique, & la ſomme de leurs cubes ſera auſſi un cube parfait; ſçavoir, 1728, dont le côté, ou la racine cubique eſt 12. De plus, l'aire & le contour de ce ſecond triangle rectangle ABC, ſeront égaux entre eux, chacun étant 24. Voyez le problême XXIII.

PROBLEME XXI.

Décrire autour d'un triangle équilatéral donné ſix cercles égaux, qui ſe touchent mutuellement, dont trois touchent les trois côtés du triangle, & les trois autres ſoient portés par ſes ſommets.

Plan. 7, fig. 25. QUe le triangle équilateral donné ſoit ABC, & que ſon centre ſoit D. Tirez de ce centre D, par les trois angles A, B, C, & par les milieux E, F, G, des trois côtés, autant de lignes droites, ſur leſquelles on doit déterminer les centres K, L, M, N, O, P, des ſix cercles qu'on cherche, & qu'on trouvera en cette ſorte.

Ayant pris ſur le côté AB la partie EH, égale à la moitié de la perpendiculaire DE, & ayant tiré la droite DH, prolongez cette ligne DH en I, en ſorte que la partie HI ſoit égale à la partie HE. Toute la ligne DI donnera la longueur du rayon de chacun des ſix cercles égaux qu'on veut décrire, dont les centres ſe trouveront en portant cette longueur DI de E en K, de B en L, &c.

REMARQUE.

Si l'on joint les deux centres P, L, par la droite

PL, cette ligne PL ſera parallele au côté AB, & diviſera par conſéquent à angles droits & en deux également au point Q, le rayon EK. D'où il ſuit que ſi l'on joint la droite EL, & la droite KL, qui paſſera par le point d'atouchement K, le triangle ELK ſera iſoſcele, chacun des deux côtés égaux EL, KL, étant double de la baſe EK: l'arc ER ſera de 75°, 31′, 20″, & l'arc BR de 44°, 28′ 40″; ce qui fait que ces deux arcs ſont enſemble préciſément 120 degrés, ſçavoir, autant que l'angle PDL.

PROBLEME XXII.

Pluſieurs demi-cercles qui ſe touchent au ſommet de l'angle droit de deux lignes perpendiculaires, & qui ont leurs centres ſur l'une de ces deux lignes étant donnés, déterminer les points où ces demi-cercles peuvent être touchés par des lignes droites tirées de ces points à un point donné ſur l'autre ligne perpendiculaire.

QUe les demi-cercles ABC, ADE, AFG, AHI, AKL, qui ont leurs centres ſur la ligne AL, perpendiculaire à la ligne AM, ſe touchent au ſommet de l'angle droit MAL, & qu'il faille trouver les points où tous ces demi-cercles ſeront touchés chacun par une ligne droite tirée du point M donné ſur la ligne AM. Plan. 7, fig. 26.

Décrivez du point donné M, comme centre, par le point d'atouchement A, l'arc de cercle AK, qui coupera les circonférences des demi-cercles donnés en des points, comme B, D, F, H, K, qui ſeront les points d'atouchement qu'on cherche.

REMARQUE.

Lorſque les diviſions de la ligne AL ſeront égales entre elles, on pourra ſe ſervir de ces demi-cercles pour diviſer une ligne donnée en parties égales. On portera cette ligne, comme ſeroit AK, ou AO, du point A juſqu'à la circonférence du cinquieme demi-cercle, ſi on la veut diviſer en cinq parties égales : elle ſe trouvera diviſée en cinq parties égales, par la circonférence des autres demi-cercles. On diviſera de la même maniere en trois parties égales la ligne propoſée, ou telle autre qu'on voudra comme AN, &c.

PROBLEME XXIII.

Décrire un triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombres, ſoit égale au contour.

Plan. 8, fig. 27. TIrez les deux lignes perpendiculaires AB, AC, de telle longueur que l'une AB ſoit de 5 parties priſes ſur une échelle diviſée en parties égales, & que l'autre AC ſoit de 12 parties de la même échelle. Joignez l'hypotenuſe BC, qui ſe trouvera préciſément de 13 parties égales, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble les quarrés 25, 144, des deux côtés AB, AC, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 169. L'aire du triangle rectangle ABC ſera égale à ſon contour, ou à la ſomme des trois côtés, chacun étant 30. Il arrive la même choſe à cet autre triangle rectangle exprimé en nombres entiers, 6, 8, 10, dont l'aire & le contour ſont chacun 24.

REMARQUE.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux triangles rectangles, 6, 8, 10 & 5, 12, 13, de chacun deſquels l'aire ſoit égale à ſon contour : mais en nombres rompus il y en a une infinité, que l'on peut trouver par ce canon général qui a ſa démonſtration. *Formez d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 2, un triangle rectangle ; diviſez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un ſecond triangle rectangle, dont l'aire ſera égale à ſon contour.* Plan. 8, fig. 27.

Comme ſi de 9 & de 11, on forme ce triangle rectangle, 40, 198, 202, & qu'on le diviſe par 9, on aura cet autre triangle rectangle $\frac{40\ 198\ 202}{9}$ dont l'aire & le contour ſont égaux, chacun étant $\frac{440}{9}$. Pareillement, ſi de 16 & de 18, on forme ce triangle rectangle 68, 576, 580, & qu'on le diviſe par 16, on aura cet autre triangle $\frac{68\ 576\ 580}{16}$, ou bien celui-ci étant réduit à ſes moindres termes, $\frac{17\ 144\ 145}{4}$, dont le contour & l'aire ſont chacun $\frac{153}{2}$. Ainſi des autres. Probl. IX. d'arith. P. 59.

PROBLEME XXIV.

Décrire au dedans d'un triangle équilatéral, trois cercles égaux qui ſe touchent mutuellement, & qui touchent auſſi les trois côtés de ce triangle.

POur inſcrire dans le triangle équilatéral ABC, trois cercles égaux, qui ſe touchant mutuellement, touchent auſſi les côtés de ce triangle, diviſez chacun de ces côtés en deux également aux points D, E, F. Par ces points D, E, F, tirez Fig. 28.

Plan. 8, fig. 28. aux angles oppoſés autant de lignes droites, ſur leſquelles vous marquerez les centres G, H, I, des trois cercles qu'on cherche, en tranſportant ſur chaque ligne perpendiculaire la moitié du côté du triangle équilatéral de ſon point de milieu, vers le ſommet de l'angle, c'eſt-à-dire, la moitié AD, ou BD, de D en G, de E en I, & de F en H.

Pour avoir le rayon des cercles cherchés, joignez deux centres G, H, par la ligne GH, qui ſe trouvera diviſée en deux parties égales par la ligne tirée du milieu du côté CB au ſommet de l'angle A. Cette moitié ſera le rayon de chacun des cercles qu'on cherche : ou bien diviſez GC en deux parties égales, la moitié ſera auſſi le rayon des cercles cherchés.

REMARQUE.

Les droites qui joignent les centres G, H, I, paſſent par les points d'atouchement, & forment le triangle équilatéral GHI, dont les côtés ſont paralleles à ceux du triangle donné ABC. Il ſe forme auſſi trois trapézoïdes égaux AIHB, BHGC, CGIA, dont chacun a trois côtés égaux à ceux du triangle équilatéral GHI, & dont les aires ſont égales chacune à la huitieme partie du quarré du côté AB du triangle donné ABC.

PROBLEME XXV.

Décrire un triangle rectangle dont l'aire exprimée en nombres ſoit ſeſquialtère du contour auſſi exprimé en nombres.

TIrez les deux lignes perpendiculaires AB, AC, de telle grandeur que l'une AB ſoit de 8 parties priſes ſur une échelle diviſée en parties égales, & que l'autre AC ſoit de 15 parties de la même échelle. Joignez l'hypotenuſe BC, qui ſe trouvera préciſément de 17 parties égales, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble les quarrés 64, 225, des deux côtés AB, AC, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 289. L'aire 60 du triangle rectangle ABC ſera au contour 40, comme 3 eſt à 2. Il arrive la même choſe à cet autre triangle rectangle en nombres entiers 7, 24, 25, dont l'aire 84 eſt auſſi ſeſquialtere du contour 56, de ſorte que ce contour 56 eſt égal aux deux tiers de l'aire 84. Plan. 8, fig. 25.

REMARQUE.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux triangles rectangles, 8, 15, 17, & 7, 24, 25, de chacun deſquels l'aire ſoit ſeſquialtere de ſon contour: mais en nombres rompus il y en a une infinité d'autres qui ont la même propriété. On peut les trouver par ce canon général, que nous avons tiré de l'algebre. *Formez d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 3, un triangle rectangle; diviſez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un ſecond triangle rectangle, dont l'aire ſera ſeſquialtere du contour.*

Probl. IX. d'arith. p. 50.

Comme ſi de 4 & de 7, on forme ce triangle 33, 56, 65, & qu'on le diviſe par 4, on aura cet autre triangle rectangle $\frac{33\,56\,65}{4}$, dont l'aire $\frac{231}{4}$ eſt à ſon contour $\frac{77}{2}$ comme 3 eſt à 2. Pareillement ſi de 16 & de 19, on forme ce triangle rectangle 105, 608, 617, & qu'on le diviſe par 16, on aura cet autre triangle $\frac{105\,608\,617}{16}$, dont l'aire $\frac{1995}{16}$ eſt à ſon contour $\frac{665}{8}$, comme 3 eſt à 2. Ainſi des autres.

PROBLEME XXVI.

Décrire au dedans d'un quarré donné, quatre cercles égaux, qui ſe touchent mutuellement & qui touchent auſſi les côtés de ce quarré.

Plan. 8, fig. 30.

SI le quarré donné eſt ABCD, diviſez chacun de ſes côtés en deux également aux points F, G, H, I, & menez les droites FH, GI, qui ſe couperont à angles droits & en deux également au centre E du quarré. On marquera ſur ces deux lignes FH, GI, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche en cette ſorte.

Joignez la droite HI, & retranchez-en la partie IK égale à la moitié IE de la ligne IG, ou du côté du quarré donné. Le reſte HK ſera le rayon de chacun des quatre cercles qu'on veut décrire. C'eſt pourquoi ſi l'on porte la longueur HK, ſur les lignes FH, GI, depuis leurs extrêmités F, G, H, I, aux points N, M, L, O, le problême ſera réſolu.

On peut encore le réſoudre de cette maniere: retranchez de la ligne IG, la partie IT, égale à la ligne IH; faites les lignes EL, EM, EN, EO, égales chacune au reſte TG, & vous aurez, com-

me auparavant, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche, & que l'on trouvera auſſi en faiſant les lignes FN, GM, HL, IO, égales chacune à la partie ET.

Voici encore une autre maniere. Faites les quatre lignes AP, AQ, CR, CS, égales chacune à la ligne IH, & joignez les droites PQ, RS, qui donneront ſur les deux lignes FH, GI, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche.

REMARQUE.

Il eſt aiſé à démontrer que chacune des deux lignes PQ, RS, eſt égale au côté AB du quarré donné ABCD, & que chacune des deux lignes PR, QS, eſt égale au diametre de chacun des cercles égaux, qui ſe touchent. On peut encore démontrer aiſément que chacun des deux triangles iſoſceles rectangles APQ, CRS, eſt égal au quarré DIEH, ou à la quatrieme partie du quarré propoſé ABCD: & que le triangle iſoſcele rectangle OEN eſt égal au quarré du rayon OI.

PROBLEME XXVII.

Décrire un parallelogramme rectangle, dont l'aire exprimée en nombres ſoit égale au contour.

TIrez les deux lignes perpendiculaires AB, AD, de telle grandeur, que l'une AB, ſoit de trois parties priſes ſur une échelle diviſée en parties égales, & que l'autre AD ſoit de 6 parties de la même échelle. Décrivez du point D, comme centre, & de l'intervalle AB, un arc de cercle vers C, & du point B, comme centre, & de l'in- Plan. 8, fig. 31.

tervalle AD, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point C. De ce point C, vous tirerez les deux lignes CB, CD, qui acheveront le rectangle ABCD, dont l'aire eſt égale au contour, chacun étant 18.

REMARQUE.

Il n'y a que trois parallelogrammes rectangles dont l'aire égale au contour ſoit exprimée en nombres entiers : ce ſont, le rectangle qu'on vient de décrire : celui qui a pour côtés des nombres doubles des côtés de celui-ci (12, 6,), & le quarré dont le côté eſt 4. Mais il y a une infinité de parallelogrammes rectangles exprimés en nombres rompus, dont on peut déterminer les côtés de cette ſorte.

Ayant donné au côté AD tel nombre qu'on voudra, plus grand que 2, comme 8, diviſez ſon double 16 par le même côté diminué de 2, c'eſt-à-dire, par 6 : le quotient $\frac{8}{3}$ ſera l'autre côté AB. Ainſi on aura en nombres un parallelogramme rectangle, ayant 8 pour longueur, & $\frac{8}{3}$ pour largeur, dont le contour & l'aire ſeront chacun $\frac{64}{3}$, ou 21 $\frac{1}{3}$.

PROBLEME XXVIII.

Meſurer avec le chapeau une diſtance qui n'eſt acceſſible qu'en une de ſes deux extrêmités.

LA diſtance à meſurer doit être d'une grandeur médiocre, autrement il ſeroit difficile de la meſurer exactement avec le chapeau, parce que pour peu que l'on manquât à viſer juſte, ou à ſe tenir bien droit, on ſe tromperoit ſenſiblement dans ſa meſure, ſur-tout ſi le terrein étoit un peu inégal. Pl. 9, fig. 32.

Pour meſurer donc avec le chapeau la diſtance AB, qui n'eſt acceſſible qu'en ſon extrêmimité A, comme ſeroit la largeur d'une petite riviere, il faut que celui qui la veut meſurer ſe tienne bien droit à cette extrêmité A, & qu'appuyant ſon menton ſur un petit bâton, qui doit être auſſi appuyé ſur quelque bouton de ſon habit, afin que ſa tête puiſſe demeurer en même état, il abbaiſſe ſon chapeau ſur le front, juſqu'à ce que le bord cache à ſa vue l'extrêmité inacceſſible B de la diſtance à meſurer AB. Après quoi il doit ſe tourner vers un terrein égal & uniforme, & remarquer en regardant par le même endroit du bord de ſon chapeau, le point de ce terrein où ſa vue ſe terminera comme en G. Alors en meſurant avec un cordeau, ou avec une chaîne, la diſtance AC, il aura la longueur de la diſtance propoſée AB.

PROBLEME XXIX.

Meſurer une ligne horiſontale, qui n'eſt acceſſible qu'en l'une de ſes deux extrêmités, par le moyen de deux bâtons inégaux.

Pl. 9. fig. 33. POur connoître la longueur de la ligne horiſontale AB, qui repréſente la largeur du foſſé ABCD, & qui n'eſt acceſſible qu'en ſon extrêmité A, élevez à-plomb en cette extrêmité A, le plus petit bâton AE des deux dont vous voulez vous ſervir pour meſurer cette ligne AB. Plantez auſſi à-plomb l'autre bâton plus grand FG, en ligne droite avec la ligne à meſurer AB, & à telle diſtance du premier AE, que par les deux bouts E, G, de ces deux bâtons ainſi élevés, vous appercéviez l'autre extrêmité B inacceſſible. Après cela meſurez exactement la diſtance AF, que nous ſuppoſerons de 12 pieds, & la longueur des deux bâtons AE, FG, dont le plus petit AE ſera ſuppoſé de 3 pieds, & le plus grand FG, de 5. De ſorte que dans cette ſuppoſition l'excès du grand bâton FG, ſur le plus petit AE, ſera de 2 pieds, comme on le connoît en ôtant 3 de 5. Cet excès 2 ſera le premier terme d'une regle de trois directe; 12, ou la diſtance AF, ſera le ſecond; 3, ou le plus petit bâton AE, ſera le troiſieme; & la ligne AB, qu'on cherche, ſera le quatrieme: elle ſe trouvera de 18 pieds. Car ſi on multiplie le ſecond terme 12, qui eſt la diſtance AF, par le troiſieme 3, qui eſt le plus petit bâton AE, & qu'on diviſe le produit 36 par 2, qui eſt l'excès du grand bâton FG ſur le plus petit AE, on a 18 pieds pour la longueur de la ligne propoſée AB.

PROBLEME XXX.

Meſurer une hauteur acceſſible par le moyen de ſon ombre.

POur connoître la hauteur acceſſible AB, par le moyen de ſon ombre AC, terminée par le rayon BC du ſoleil, élevez à-plomb le bâton DE d'une longueur priſe à volonté, comme de 8 pieds, & meſurez la grandeur de ſon ombre DF, que nous ſuppoſerons de 12 pieds. Meſurez en même tems l'ombre AC, qui ſoit, par exemple, de 36 pieds. J'ai dit en même tems, parce qu'autrement le ſoleil changeant de place à chaque inſtant, les rayons BC, EF, ne ſeront plus paralleles; ce qui empêcheroit de pouvoir trouver la hauteur AB par cette regle de trois directe : ſi 12 pieds de l'ombre DF proviennent d'une hauteur DE de 8 pieds, de quelle hauteur proviendra l'ombre AC de 36 pieds? On trouvera 24 pieds pour la hauteur AB, qu'on cherche: car en multipliant le troiſieme terme 36 par le ſecond 8, & en diviſant le produit 288 par le premier 12, on a pour quotient 24, qui eſt le quatrieme terme proportionnel, ou la hauteur propoſée AB. Pl. 9. fig. 34.

PROBLEME XXXI.

Trouver à trois lignes données une quatrieme proportionnelle.

POur trouver aux trois lignes données AB, AC, AD, une quatrieme proportionnelle, décrivez des deux extrêmités B, D, de la pre- Fig. 35.

miere & de la troiſieme ligne donnée, par l'extrêmité commune A, les deux arcs de cercle AEF, AGH; & ayant appliqué ſur le premier AEF la ligne AE, égale à la ſeconde ligne donnée AC, prolongez cette ligne AE juſqu'à ce qu'elle rencontre le ſecond arc AGH, en quelque point, comme en G. Toute la ligne AG ſera la quatrieme proportionnelle qu'on cherche.

PROBLEME XXXII.

Décrire ſur une ligne donnée un parallelogramme rectangle, dont l'aire ſoit double de celle d'un triangle donné.

Pl. 9, fig. 36. SI le triangle donné eſt ABC, & que la ligne donnée ſoit BE, élevez à l'extrêmité E la perpendiculaire EF, qui ſoit la quatrieme proportionnelle à la baſe donnée BE, à la baſe AB du triangle donné ABC, & à ſa hauteur CD. Achevez le rectangle BEFG, qui ſera celui qu'on cherche. Ce problême n'a été mis que pour réſoudre le ſuivant.

PROBLEME XXXIII.

Changer un triangle donné en un autre triangle dont chaque côté ſoit plus grand que chaque côté du triangle donné.

Fig. 37. SI le triangle donné eſt ABC, prolongez ſa baſe AB de part & d'autre en D & en E, en ſorte que la ligne AD ſoit égale au côté AC, & la ligne BE au côté BC; & par le moyen du problême précédent, décrivez ſur la ligne DE le parallelogramme rectangle DEGF, qui ſoit double

du triangle donné ABC. Cela étant fait, ſi l'on prend ſur la ligne DE, entre les points A, B, un point à diſcrétion, comme H, d'où l'on tire aux deux extremités F, G, les droites FH, GH, le triangle FGH ſera celui qu'on cherche, c'eſt-à-dire, qu'il ſera égal au propoſé ABC, l'un & l'autre étant chacun la moitié du rectangle FGED, & chacun de ſes côtés ſera plus grand que chacun des côtés du triangle donné ABC.

REMARQUE.

On peut même avoir un triangle moindre que le propoſé ABC, quoique tous ſes côtés ſoient plus grands que tous les côtés du triangle ABC, en prenant le ſommet H du triangle FGH au deſſous de la baſe AB.

PROBLEME XXXIV.

Deux demi-cercle qui ſe touchent en dedans, étant donnés ſur une même ligne droite, décrire un cercle qui touche la ligne droite & les circonférences des deux demi-cercles donnés.

JE ſuppoſe que les deux demi-cercles ABC, ADE, ſont poſés ſur la ligne droite AC, & qu'ils ſe touchent au point A. Pour décrire un cercle qui touche les deux circonférences ABC, ADE, & la partie EC de la ligne-droite AC, portez la longueur du demi-diametre AG du grand demi-cercle ABC, de F, centre du petit demi-cercle ADE, en O, pour avoir la ligne AO, égale à la ſomme des demi-diamêtres AF, AG des deux demi-cercles donnés ABC, ADE. Elevez Pl. 9. fig. 32.

Pl. 9. fig. 38. au point E, ſur AC, la perpendiculaire EB, & joignez la droite AB. Cherchez aux deux lignes AO, AB, une troiſieme proportionnelle AH, pour avoir en H le point d'attouchement du cercle qu'on veut décrire, & de la ligne droite EC. Elevez de ce point H ſur EC la perpendiculaire HI, quatrieme proportionnelle aux trois lignes AO, AH, FG, pour avoir en I le centre du cercle qu'on cherche, dont la circonférence touchera EC en H, & les circonférences des deux cercles donnés, le plus grand au dedans, & le plus petit au dehors.

REMARQUE.

Si au dedans de l'eſpace terminé par les deux circonférences ABC, ADE, on décrit un ſecond cercle qui touche le premier décrit du centre I, & les deux circonférences ABC, ADE, & que du centre K de ce ſecond cercle on abaiſſe la droite KL perpendiculaire au diametre AC, cette perpendiculaire KL ſera triple du rayon du cercle décrit du centre K. Si au dedans du même eſpace on décrit un troiſieme cercle, qui touche le ſecond décrit du centre K, & les circonférences ABC, ADE, la perpendiculaire abaiſſée du centre M de ce troiſieme cercle ſur le diametre AC, ſera quintuple du rayon du même cercle. De même, ſi au dedans du même eſpace on décrit un quatrieme cercle, qui touche le troiſieme décrit du centre M, & les circonférences des deux demi-cercles, la perpendiculaire abaiſſée du centre P de ce quatrieme cercle ſur le diametre AC, ſera ſeptuple du rayon du même cercle, & ainſi des autres, ſelon la progreſſion des nombres impairs, 3, 5, 7, 9, &c.

Nous remarquerons ici, que tous les cercles in-

ſins qui peuvent toucher les deux circonférences ABC, ADE, ont leurs centres dans la circonférence d'une ellipſe, dont un axe eſt AO, qui a pour parametre la ligne AH.

PROBLEME XXXV.

Trois demi-cercles qui ſe touchent en dedans étant donnés ſur une ligne droite, décrire un cercle qui touche les circonférences des trois demi-cercles.

SOient les trois demi-cercles ABC, ADE, EIC, dont les centres F, G, H, ſont ſur la ligne droite AC. Ayant trouvé à la ligne FG & au rayon AF, une troiſieme proportionnelle AL, cherchez à la ſomme des deux lignes AL, AG, au rayon AG, & au rayon AF, une quatrieme proportionnelle, qui ſera la longueur du rayon KI du cercle que l'on cherche. Portez cette quatrieme proportionnelle KI ſur la ligne AC de G en M, & de F en N. Enſuite du centre F & de l'intervalle NE, décrivez vers K un arc de cercle: puis du centre H & de l'intervalle FM, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier en K. Ce point d'interſection K ſera le centre du cercle cherché, qu'il ne ſera pas difficile de décrire, puiſque ſon rayon GM, ou EN, eſt connu. Pl. 10, fig. 39.

Obſervez que l'on auroit pu trouver le point d'interſection K, en décrivant le ſecond arc de cercle du centre G & de l'intervalle MC.

REMARQUE.

Si l'on joint le centre K avec les centres F, G, H, des trois demi-cercles donnés, par les lignes droites FK, GK, HK, on aura les deux triangles FKG, GKH, de même contour, le contour de

chacun étant égal au diametre AC du grand demi-cercle donné ABC, à cauſe des deux lignes égales AF, GH.

Si entre les deux circonférences ABC, ADE, on décrit, comme dans le problême précédent, autant de cercles qu'on voudra, qui ſe touchant mutuellement, touchent auſſi les deux circonférences ABC, ADE, & que de leurs centres O, P, Q, K, on tire ſur le diametre AC, autant de perpendiculaires, la perpendiculaire KV ſera égale au diametre de ſon cercle; la perpendiculaire QT ſera double du diametre de ſon cercle; la perpendiculaire PS ſera triple du diametre de ſon cercle; la perpendiculaire OR ſera quadruple du diametre de ſon cercle; & ainſi des autres, ſelon la ſuite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

PROBLEME XXXVI.

Trois demi-cercles qui ſe touchent en dedans étant donnés ſur une ligne droite, avec une autre ligne droite tirée par le point d'attouchement des deux demi-cercles intérieurs, & perpendiculaire à la premiere ligne droite, décrire deux cercles égaux qui touchent cette perpendiculaire & les circonférences des deux demi-cercles.

Pl. 10, fig. 40. SOient les trois demi-cercles donnés ABC, ADE, EOC, dont les centres F, G, H, ſont placés ſur la ligne droite AC, qui eſt coupée à angles droits au point E, par la ligne droite BE. On trouvera le rayon commun aux deux cercles égaux qui doivent toucher la perpendiculaire BE & les circonférences des deux demi-cercles, en décrivant du point A par le centre F, l'arc de cercle

FI, puis du point I par le point A, l'arc de cercle AK; la ligne KF donnera la longueur du rayon des deux cercles égaux que l'on cherche, dont les centres M, N, ſe trouveront en cette ſorte. Pl. 10, fig. 40.

Ayant fait la ligne GL égale à la ligne KF, décrivez du centre G & de l'intervalle LC, l'arc de cercle MN, puis du centre F, & de l'intervalle KE un autre arc de cercle, qui coupant le premier MN, donnera le centre M du cercle qui doit toucher les circonférences des deux demi-cercles ABC, ADE, & la perpendiculaire EB. Décrivez auſſi du centre H & de l'intervalle FL, un autre arc de cercle, qui coupant le premier MN, donnera le centre N du cercle qui doit toucher la perpendiculaire BE & les deux circonférences ABC, EOC.

REMARQUE.

Si on joint les deux centres M, N, avec les trois F, G, H, par des lignes droites, on aura les deux triangles FMG, GNH, d'un contour égal; ce contour étant dans chaque triangle égal au diametre AC du plus grand demi-cercle donné ABC, à cauſe des deux côtés égaux GM, GN, de la baſe GH égale au rayon AF, ou FD, des rayons égaux MD, NO, & de la baſe FG égale au rayon EH, ou HO. De plus, le rayon MD, ou NO, eſt quatrieme proportionnel aux trois lignes AG, AF, FG. Enfin ſi on joint les droites AO, CD, la ligne AO ſera perpendiculaire au rayon HO, ou NO, & touchera par conſéquent les circonférences de ces deux rayons au point O: la ligne CD ſera auſſi perpendiculaire à chacun des deux rayons FD, MD, & touchera par conſéquent au point D, les circonférences de ces deux rayons.

D'où l'on peut tirer une autre conſtruction pour la réſolution du problême.

PROBLEME XXXVII.

Décrire un triangle dont l'aire & le contour ſoient un même nombre quarré.

Pl. 10, fig. 41. AYant fait la baſe AB de 17 parties priſes ſur une échelle diviſée en parties égales, décrivez de l'extrêmité A, avec l'ouverture de 9 de ces parties, un arc de cercle vers le point C, & un autre arc de cercle de l'autre extrêmité B, avec l'ouverture de 10 des mêmes parties, qui coupera le premier arc de cercle en un point, comme C. Joignez les droites AC, BC, & le triangle ABC ſera celui que l'on cherche, ſon aire & ſon contour étant chacun 36, dont la racine quarrée eſt 6.

REMARQUE.

Ce triangle a été trouvé en nombres par le moyen de ces deux triangles rectangles en nombres 72, 135, 153, & 72, 154, 170, qui ſont de même hauteur; leurs nombres générateurs ſont 12, 3 & 11, 7. Car joignant enſemble ces
Fig. 42. deux triangles, on a le triangle obliquangle ABC, dont la hauteur CD ſera 72 à l'égard de la baſe AB, qui eſt 289, & en diviſant chaque côté par la racine quarrée 17 de cette baſe 289, on a les trois côtés 17, 10, 9.

PROBLEME XXXVIII.

Faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés, ſans en connoître le centre.

IL faut que les trois points propoſés ne ſoient pas dans une même ligne droite, mais qu'ils puiſſent former un triangle ACB. Pour décrire une circonférence de cercle qui paſſe par les trois points donnés A, C, B, ſans en chercher le centre, on commencera par décrire l'arc de cercle AC en cette ſorte. Pl. 10, fig. 43.

Ayant imaginé les lignes AC, CB, on fera avec une carte ou du carton un angle égal à l'angle ACB, dont les côtés CA, CB, ſoient prolongés vers A & vers B. Après avoir appliqué cet angle de carton ACB ſur l'angle ACB, on décrira l'arc CA en abaiſſant la pointe C vers A, de façon que le point A ſoit toujours appliqué le long du côté AC, en même tems que le point B demeurera appliqué le long du côté du carton CB prolongé; le point C par ſon mouvement décrira l'arc CA.

Le même angle de carton ABC ſervira à décrire l'autre arc CB: en même tems qu'on abaiſſera la pointe C vers B, il faut que le point B demeure appliqué le long du côté CB, & que le point A ſoit appliqué le long du côté AC prolongé. C'eſt ainſi que la pointe C décrira l'arc de cercle CB.

Mais pour décrire le troiſieme arc de cercle AB ſur le côté AB, on fera un angle de carton égal à l'angle ABC, dont les côtés ſeront prolongés vers A & vers C. On obſervera les mêmes précautions que l'on a obſervées en décrivant les deux arcs AC CB. La pointe B, par ſon mouvement de B vers A,

décrira un arc ſoutenu par la ligne AB. Ces trois arcs AC, CB, BA, formeront la circonférence du cercle ACB, que l'on cherchoit, ſans en connoître le centre.

REMARQUE.

Pour décrire l'arc AB, au lieu de faire l'angle de carton égal à l'angle ABC, on peut le faire égal à l'angle BAC, & faire mouvoir la pointe A vers B.

PROBLEME XXXIX.

Deux lignes perpendiculaires à une ligne tirée par leurs extrêmités étant données, trouver ſur cette ligne auſſi donnée, un point également éloigné des deux autres extrêmités des deux lignes données.

Pl. 11, fig. 44. SOient données les deux lignes égales ou inégales AB, CD, perpendiculaires à la ligne AC, qui paſſe par leurs extrêmités A, C. On trouvera ſur cette ligne AC, le point F également éloigné des deux autres extrêmités B, D, en joignant ces deux extrêmités par la droite BD, & en tirant à cette même ligne BD, par E, ſon point du milieu, la perpendiculaire EF, qui donnera ſur la ligne AC le point F, que l'on cherche, de ſorte que les deux lignes FB, FD, ſeront égales entre elles.

REMARQUE.

Ce problême ſe propoſe ordinairement ainſi: *les hauteurs AB, CD, & leur diſtance AC étant données, trouver ſur le terrein AC le point F, en ſorte que les cordes qui ſeront tendues depuis les*

ſommets B, D, juſqu'au point F, ſoient égales entre elles.

Lorſque les hauteurs AB, CD, & leur diſtance AC ſeront connues en nombres, comme ſi la hauteur AB étoit de 56 pieds, la hauteur CD de 63, & la diſtance AC de 49, on trouvera la partie AF, en ôtant de la ſomme des deux quarrés AC, CD, le quarré AB, & en diviſant le reſte par le double de AC. De même on trouvera la partie CF, en ôtant de la ſomme des quarrés AC, AB, le quarré CD, & en diviſant le reſte par le double de AC. Ainſi la partie AF ſe trouvera de 33 pieds, & l'autre partie CF de 16 : & chacune des deux cordes égales FC, FD, ſe trouvera de 65 pieds, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble les deux quarrés AB, AF, ou bien les deux CD, CF, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 4225.

PROBLEME XL.

Décrire deux triangles rectangles, dont les lignes ſoient telles, que la différence des deux plus petites du premier triangle ſoit égale à la différence des deux plus grandes du ſecond, & réciproquement que la différence des deux plus petites lignes du ſecond triangle ſoit égale à la différence des deux plus grandes du premier.

Tirez premierement les deux lignes AB, AC, perpendiculaires l'une à l'autre, de telle grandeur que la premiere AB ſoit de 60 parties priſes ſur une échelle diviſée en parties égales, & la ſeconde AC de 11 parties. Alors l'hypoténuſe BC ſe trouvera de 61 parties, comme on le connoîtra, en ajoutant enſemble les quarrés AB, AC, & Pl. 11, fig. 45.

en prenant la racine quarrée de la ſomme 3721.

Pl. 11, fig. 43. Tirez enſuite deux autres lignes DE, EF, auſſi perpendiculaires l'une à l'autre, dont la premiere DE ſoit de 119 parties, & la ſeconde EF de 120. Alors l'hypothénuſe DF ſe trouvera de 169 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble les quarrés DE, EF, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 28561. Les deux triangles rectangles ABC, DEF ſatisferont au problême : car la différence 49 des deux plus petites lignes AB, AC, eſt égale à la différence des deux plus grandes DF, EF du ſecond DEF. Réciproquement la différence 1 des deux plus petites DE, EF, du ſecond triangle DEF, eſt égale à la différence des deux plus grandes AB, BC, du premier ABC.

REMARQUE.

Ces deux différences 49, 1, ſe rencontrent ici des nombres quarrés, & elles ſeront toujours telles dans les autres couples de triangles rectangles, qu'on peut trouver par ce canon général, que j'ai tiré de l'algebre. *Le double du produit du plus grand de deux nombres quelconques par leur ſomme, & la ſomme des quarrés des deux mêmes nombres, ſont les deux nombres générateurs de l'un des deux triangles rectangles que l'on cherche. Et le double du produit du plus petit des deux mêmes nombres par leur ſomme & la même ſomme des quarrés, ſont les deux nombres générateurs de l'autre triangle rectangle que l'on cherche.*

De ces trois nombres générateurs, celui qui eſt commun aux deux triangles rectangles, eſt l'hypoténuſe d'un troiſieme triangle rectangle ; l'un des deux autres eſt le contour de ce troiſieme

triangle rectangle, & le troiſieme eſt le même contour, en y changeant le plus grand nombre générateur du troiſieme triangle rectangle au plus petit.

PROBLEME XLI.

Diviſer la circonference d'un demi-cercle donné en deux arcs inégaux : en ſorte que le demi-diametre ſoit moyen proportionnel entre les cordes de ces deux arcs.

SI le demi-cercle donné eſt AEB, dont le centre ſoit D, décrivez par ce centre D, de l'extrêmité B du diametre AB, l'arc de cercle DE ; & ayant diviſé l'arc BE en deux également au point C, tirez les deux cordes AC, BC, entre leſquelles le demi-diametre AD, ou CD, ſera moyen proportionnel. Pl. 11, fig. 46.

REMARQUE.

Il eſt évident que l'arc BE eſt de 60 degrés, par conſéquent ſa moitié BC, ou CE, eſt de 30 degrés, & l'autre arc AEC de 150 degrés. D'où il eſt aiſé de conclure, que le ſinus d'un arc étant la moitié de la corde d'un arc double, & la moitié du rayon ou ſinus total étant le ſinus d'un arc de 30 degrés, ce ſinus d'un arc de 30 degrés eſt moyen proportionnel entre le ſinus d'un arc de 15 degrés & le ſinus de ſon complément, ou le ſinus d'un arc de 75 degrés.

PROBLEME XLII.

Une échelle d'une longueur connue étant appuyée par le haut contre une muraille, & en étant éloignée par le pied d'une certaine diſtance, trouver de combien elle deſcendra lorſqu'on l'éloignera davantage du pied de la même muraille.

Pl. 11. fig. 48. SUppoſons que l'échelle EF, qui eſt appuyée contre la muraille ABCD, ſoit longue de 25 pieds, & éloignée du pied de la même muraille de 7 pieds, en ſorte que la ligne FG, qui eſt perpendiculaire à la muraille, ſoit de 7 pieds. Suppoſons encore qu'on éloigne cette échelle de F vers H, de 8 pieds, en ſorte qu'ayant la ſituation HI, la partie FH ſoit de 8 pieds, & toute la ligne GH par conſéquent de 15 pieds; alors l'échelle ſera deſcendue de la ligne EI, que l'on trouvera en cette ſorte.

Multipliez la longueur EF de l'échelle par elle-même, c'eſt-à-dire, 25 par 25, pour avoir ſon quarré 625. Multipliez auſſi la longueur FG par elle-même, c'eſt à dire, 7 par 7, pour avoir ſon quarré 49, qu'il faut ôter du quarré précédent 625. Le reſte 576 ſera le quarré de la hauteur EG, à cauſe du triangle EFG rectangle en G. C'eſt pourquoi ſi on prend la racine quarrée de ce reſte 576, on aura 24 pieds pour la hauteur EG.

Multipliez pareillement la longueur HI par elle-même, ou 25 par 25, pour avoir ſon quarré 625. Multipliez auſſi la longueur HG par elle-même, ou 15 par 15, pour avoir ſon quarré 225, lequel étant ôté du précédent quarré 625, il reſtera 400 pour le quarré de la hauteur IG. C'eſt pourquoi ſi

on prend la racine quarrée de ce reſte 400, on aura 20 pour la hauteur IG. Cette hauteur étant ôtée de la hauteur EG, qui a été trouvée de 24 pieds, le reſte donnera 4 pieds pour la ligne EI que l'on cherche.

PROBLEME XLIII.

Meſurer une diſtance acceſſible ſur la terre par le moyen de la lumiere & du bruit d'un Canon.

FAites avec une balle de mouſquet un pendule long de 11 pouces & 4 lignes, en prenant cette longueur depuis le centre de mouvement juſqu'au centre de la balle : & au moment que vous appercevrez la lumiere du Canon, qui doit être au lieu dont vous cherchez la diſtance du lieu où vous êtes, mettez le pendule en branle, en ſorte que les arcs des vibrations ne paſſent pas 30 degrez. Enfin multipliez par 100 le nombre des vibrations ſimples qui ſe ſeront faites depuis le moment que vous avez apperçû la lumiére juſqu'à celui où vous avez entendu le bruit du coup de Canon : le produit donnera en toiſes de Paris la diſtance du lieu où vous êtes au lieu où l'on a tiré ce coup de Canon.

REMARQUE.

C'eſt à peu près de la même maniére qu'on pourra meſurer la hauteur d'une nuée, lorſqu'elle eſt proche du Zenit, & qu'il y fait des éclairs & des Tonnerres ; mais cette maniére de meſurer une telle diſtance, eſt fort incertaine : je ne l'ai indiqué ici que par récréation.

Elle ſera plus certaine, lorſqu'on voudra meſu-

rer une médiocre diſtance ſur la terre, dont les extrêmités ſont tellement ſituées, que de l'une on ne peut voir l'autre : mais au lieu du canon, il ſera plus commode de ſe ſervir de l'arquebuſe, dont le ſon ſe porte à la diſtance de 230 toiſes en une ſeconde de temps.

Ainſi pour meſurer cette diſtance, il faut par le moyen d'une horloge à pendule, compter les ſecondes de temps, qui ſe ſeront écoulées entre la lumiere de l'arquebuſe qui aura été tirée à l'une des deux extrêmités de la diſtance propoſée, & le ſon qui ſera parvenu aux oreilles d'une perſonne, qui doit être à l'autre extrêmité de la même diſtance; car en multipliant le nombre des ſecondes par 230, on aura en toiſes la longueur de la ligne propoſée.

Il n'eſt point néceſſaire de ſe ſervir des ſecondes d'un pendule; on peut s'en tenir aux vibrations ſimples du pendule fait avec une balle de mouſquet. Celui qui eſt au pendule tire un coup, en mettant le pendule en branle; l'autre qui eſt à l'extrêmité de la diſtance à meſurer, tire ſi-tôt qu'il l'entend, & le premier arrête le pendule dès qu'il entend le coup du ſecond. Cette obſervation faite, ſi on multiplie le nombre des vibrations par 100, on a en toiſes le double de la diſtance, ſçavoir, l'aller & le revenir du ſon; & ſi l'on en prend la moitié, on a la diſtance qu'on vouloit meſurer.

On a déja remarqué qu'en mettant le pendule en branle, il ne falloit pas lui faire décrire un arc plus grand que 30 degrez : on doit ajoûter que les 22 vibrations du pendule font une lieue moyenne de France, telle qu'on en compte deux depuis le grand Châtelet de Paris juſqu'à la porte de l'Egliſe de l'Abbaye de S. Denis.

M. de la Hire vouloit que le pendule ne fût long que de 9 pouces, & qu'on en multipliât les vibrations par 90 toiſes.

Le Pere Schot dit que par pluſieurs experiences on a connu qu'un boulet de gros canon pointé horiſontalement, fait une lieue d'Allemagne de 4000 pas Geométriques en deux ſecondes de temps; ce qui peut ſervir auſſi pour meſurer une diſtance ſur la terre, s'il eſt vrai que la vîteſſe du ſon eſt égale à celle du boulet; car ainſi l'on pourra dire que la diſtance en pas Géométrique eſt au temps en ſecondes entre la lumiere & le coup entendu, comme 4000 eſt à 2, ou comme 2000 à 1, &c.

PROBLEME XLIV.

Meſurer la ſurface d'un Parallelogramme.

I.

SOit un Parallelogramme rectangle ABCD, dont l'un des côtés AB eſt de 8 toiſes, & l'autre AC eſt de 6 toiſes, on veut ſçavoir combien il contient de toiſes dans ſa ſurface. Il ſuffit pour cela de multiplier le côté AB, 8, par le côté AC, 6, le produit 48 eſt le nombre des toiſes que contient la ſurface du Parallelogramme rectangle ABCD. Planche 21. Fig. 2.

II.

Si le Parallelogramme eſt obliquangle, comme EIFH, dont un des côtés EF eſt de 3 toiſes, & l'autre FH eſt de 10; du ſommet de quelqu'un des angles, comme de E, il faut abbaiſſer la perpendiculaire EG, qui ſe trouve être ici de 2 toiſes, on multipliera ces 2 toiſes par les 10 que con- Planche 21. Fig. 3.

tient le côté FH, ſur lequel on a abbaiſſé la perpendiculaire : le produit 20 eſt le nombre des toiſes que contient la ſurface du Parallelogramme obliquangle EIFH.

Procès à décider.

Planche 2. Fig. 4. & 5. Caius avoit un champ parfaitement quarré, dont chaque côté étant de 6 toiſes, le circuit par conſéquent étoit de 24 toiſes. Sempronius voulant s'en accommoder, il propoſe à Caius de l'échanger pour une piéce de terre qui avoit auſſi 24 toiſes de circuit, mais qui n'étoit point parfaitement quarrée : c'étoit un Parallelogramme rectangle, dont un des côtez avoit 3 toiſes de large, & l'autre avoit 9 toiſes de long.

Caius ne ſçavoit point de Géométrie, & il avoit été trompé par le raiſonnement captieux de Sempronius, qui lui aſſuroit que les figures qui ont un même circuit, ſont égales entr'elles. Dans la ſuite ſes amis lui firent connoître qu'il avoit été la dupe de Sempronius, qui lui avoit donné un champ qui ne contenoit que 27 toiſes, en échange d'un qui en contenoit 36.

La conteſtation fut portée devant le Juge du lieu, qui après avoir pris l'avis d'un Arpenteur, déclara que Caius avoit été ſurpris, & par conſéquent que l'échange étoit nul.

REMARQUE.

Entre deux quarrez parfaits, dont l'un a le côté double du côté de l'autre, celui-là eſt quadruple de celui-ci. Qu'on propoſe deux quarrez, dont l'un ait pour côté 6 pieds, & l'autre 3, le quarré qui a 6 pour côté, eſt quadruple de celui qui a 3;

pour côté ; car le premier contient 36 pieds de ſurface, le ſecond en contient 9, qui eſt le quart de 36.

PROBLEME XLV.

Meſurer la ſurface d'un Cercle.

IL faut connoître le diamétre du cercle, & ſa circonférence, multiplier le demi-diamétre ou rayon par la moitié de la circonférence, ou bien toute la circonférence par le quart du diamétre ; le produit ſera la ſurface du cercle. Voyez le Probl. XII. pag. 285.

I.

Si l'on n'avoit que le diamétre d'un cercle, & qu'il fût difficile de meſurer ſa circonférence, il faudra, pour l'obtenir, faire une regle de trois, dont le premier terme ſera 7, le ſecond 22, & le troiſiéme ſera le diamétre du cercle dont on cherche la ſurface. La régle étant faite, on aura pour quatriéme terme la circonférence du même cercle. On ſçait, par exemple, que le diamétre d'un baſſin eſt de 28 pieds ; pour avoir ſa circonférence il faut multiplier 28 par 22, & diviſer le produit 616 par 7, le quotient 88 eſt le nombre des pieds que contient la circonférence de ce baſſin. Ainſi pour avoir ſa ſurface, on multipliera 44 moitié de la circonférence par 14 moitié du diamétre, ou toute la circonférence 88 par 7 quatriéme partie du diamétre 28 ; le quotient 616 donnera le nombre des pieds de la ſurface du cercle.

II.

Au contraire il peut arriver qu'on connoiſſe la

circonférence, ſans connoître le diamétre du cercle, pour lors il faut faire une régle de trois, dont le premier terme ſera 22, le ſecond 7, & le troiſiéme ſera la circonférence connue : la regle faite donnera un quatriéme terme, qui ſera le diamétre cherché.

On a meſuré le circuit d'une Tour que je ſuppoſe être de 88 toiſes ; pour avoir ſon diamétre on multipliera 88, circuit de la Tour par 7, &. l'on diviſera le produit 616 par 22 ; le quotient 28 ſera le nombre des toiſes que contiendra le diamétre de la Tour.

III.

On peut encore avoir la ſurface d'un cercle en faiſant cette régle de trois : comme 14 eſt à 11, ainſi le quarré du diamétre du cercle eſt à un quatriéme nombre, qui ſera la ſurface du cercle cherché.

REMARQUE.

Ce qu'on a remarqué des quarrez, doit auſſi s'entendre de deux cercles, dont l'un auroit le diamétre double du diamétre de l'autre : je veux dire que celui qui a le diamétre double, a une ſurface quadruple de la ſurface de l'autre. Si, par exemple, un cercle a 6 pieds de diamétre, & qu'un autre en ait trois, la ſurface de celui qui a 6 pieds de diamétre, eſt à la ſurface de celui qui a 3 pieds de diamétre, comme 36 à 9 ou 4 à 1. On doit appliquer à la circonférence ou au circuit, ce qu'on vient de dire du diamétre.

QUESTION I.

Une Cuiſiniere étant allée au marché, convient qu'on lui donnera pour un certain prix autant de bottes d'Aſperges qu'elle en pourra lier avec une ficelle d'un pied de long ; il ſe trouve qu'elle en a eu quatre bottes. Le lendemain ayant beſoin d'une plus grande quantité d'Aſperges, elle retourne au marché, avec une ficelle longue de deux pieds. Elle offre le double du prix qu'elle a donné le jour précédent, pour avoir autant de bottes d'Aſperges qu'elle en poura lier avec la ficelle de deux pieds de long. On demande ſi elle n'auroit que 8 bottes d'Aſperges.

SUivant les remarques précédentes, elle doit avoir ſeize bottes d'Aſperges ; car la ficelle étant double, elle fait un quarré ou un cercle, dont le circuit eſt double : par conſéquent la ſurface en ſera quadruple ; c'eſt-à-dire, que le lien qui eſt double contiendra quatre fois plus que le ſimple.

La méthode pour réſoudre ces ſortes de queſtions, eſt de faire une régle de trois, dont le premier terme eſt le quarré de la choſe propoſée, le ſecond la choſe qui eſt contenue, & le troiſiéme le quarré de la choſe dont on veut ſçavoir le contenu. Comme dans cet exemple, ſi 1 quarré de 1 meſure du lien, donne 4 bottes d'Aſperges, combien 4 quarré de 2 meſure du ſecond lien, dont on veut ſçavoir le contenu.

QUESTION II.

Une corde de 10 pieds de long entoure 200 piques; on veut ſçavoir combien une corde de 8 pieds de long entourera de piques.

ON trouvera par la régle qu'on vient de propoſer, que la corde de 8 pieds entourera 128 piques, en faiſant cette régle de trois : ſi 100 quarré de 10 donne 200, combien 64 quarré de 8, longueur de la corde, dont il eſt propoſé de connoître ce qu'elle doit contenir de piques.

QUESTION III.

Sempronius a emprunté de Caius un ſac de blé qui avoit 5 pieds de haut & 4 pieds de large : quand il falut rendre le blé, Sempronius prit quatre ſacs hauts de 5 pieds & larges d'un pied ſeulement. Sempronius rendit-il à Caius tout le blé qu'il avoit emprunté ?

IL s'en faut de beaucoup, Sempronius ne rendît que le quart du blé que Caius lui avoit prêté.

QUESTIONS IV. V. VI.

ON ne fera que propoſer les queſtions ſuivantes : il ſera aiſé de réſoudre, par les principes qu'on a poſé, non-ſeulement celles qu'on va lire, mais encore pluſieurs autres qui ſont de la même nature.

Un Particulier a pour ſon uſage un pouce d'eau; il reçoit du Magiſtrat la permiſſion d'en avoir une fois davantage ; il n'y a point de doute que ſi ce

Particulier faiſoit faire un tuyau qui eût deux pouces de diamétres, il auroit quatre fois plus d'eau qu'il n'en avoit.

Une Vieille ayant acheté des marrons plein un ſac pour un certain prix; elle en demande pour le prix double dans un ſac qui a deux fois plus d'étoffe dans ſon circuit, quoiqu'il ſoit de la même hauteur que le premier; elle aura quatre fois plus de marrons.

Si on défonce deux futailles, & qu'on en faſſe une ſeule des douves de ces deux futailles, la futaille faite des deux contiendra quatre fois plus de vin que l'une des deux n'en contenoit.

PROBLEME XLVI.

Tracer un ovale ſur le terrein.

L'Ovale a deux diamétres, dont l'un CD eſt plus grand que l'autre EG. Sur le plus grand CD on choiſit deux points A, B, qu'on appelle foyers, qui ſont également éloignez des extrêmitez C, D du grand diamétre. On plante à ces deux points deux jalons ou piquets, auſquels on attache un cordeau AHB: ce cordeau doit être de la même grandeur que le diamétre CD: on le replie avec un troiſiéme jalon, ou un bâton tel que vous voyez en H, & l'on conduit ce bâton, en tenant toûjours le cordeau également tendu, depuis C par HE juſqu'en D. Enſuite on repaſſe le cordeau de l'autre côté du diamétre CD, on trace de la même façon l'autre côté CGD, & l'on a un ovale CEDG tracé ſur le terrein. On l'appelle l'ovale du Jardinier, parce que c'eſt de cette maniére que les Jardiniers le tracent. Planche 23 Fig. 6.

REMARQUE.

Si on vouloit tracer un cercle, au lieu de mettte deux jalons A, B aux foyers de l'ovale, il ſuffiroit d'en mettre un en C, centre du cercle, on plieroit un cordeau de la longueur du rayon CA, on y attacheroit un jalon en A, & l'on feroit mouvoir ce cordeau autour du jalon planté en C, de maniere que le jalon A traceroit un cercle en tenant toûjours le cordeau également tendu.

PROBLEME XLVII.

Meſurer la ſurface d'un ovale.

APrès avoir multiplié les deux diametres, vous ferez une regle de trois, dont le premier terme ſera 14, le ſecond 11, & le troiſiéme ſera le produit des deux diametres de l'ovale dont on cherche la ſurface. Comme ſi le grand diametre CD eſt de 16 pieds, & que le petit ſoit de 9 pieds, on multipliera 9 par 16, le produit ſera 144. Enſuite on diviſera par 14 le produit 1584 de 144 par 11, & le quotient $113\frac{1}{7}$ ſera la ſurface de l'ovale CEDG.

Planche 2. Fig. 6.

PROBLEMES DE MUSIQUE.

LA Muſique a pour objet le ſon en tant qu'il eſt agréable à l'organe de l'ouïe. Le ſon eſt cauſé par les vibrations & fremiſſemens du corps ſonore, ou de ſes parties, qui étant ordinairement tranſmis à l'oreille par le moyen de l'air, excitent une ſenſation agréable ou déſagréable. On peut conſiderer un ſon ſeul, ou comparer pluſieurs ſons enſemble.

L'impreſſion qu'un ſeul ſon cauſe à l'oreille eſt forte ou foible: elle peut auſſi être plus vive ou moins vive.

Lorſque deux ou pluſieurs corps ſonores forment des ſons, ſi les vibrations des uns & des autres ſont telles qu'elles s'accordent enſemble de temps en temps, & par conſéquent leurs impreſſions, cette union d'impreſſions s'appelle *accord*. Cet accord peut donc être exprimé par des nombres, puiſque ce n'eſt que le rapport du nombre des vibrations du corps ſonore, au nombre des vibrations d'un autre corps ſonore entre les unions d'impreſſions. Si, par exemple, deux ſons réuniſſent leurs impreſſions dans un certain temps aprés cinq vibrations de l'un & ſix de l'autre, ce rapport de 5 à 6 des vibrations de ces deux corps ſonores, exprimera un accord.

Les accords ſe diviſent en conſonnances & en diſſonnances. Les conſonnances ſont des accords

agréables à l'ouïe par eux-mêmes, on les exprime par de petits nombres, comme de 2 à 3. Les diſſonances ſont des accords qui ſont déſagréables; on les exprime par de grands nombres, comme de 15 à 16.

On conſidere donc dans la Muſique, 1°. le ſon, qui ſe diviſe en tons & en demi-tons. 2°. La durée de ces tons & demi-tons, qui eſt ce qu'on appelle la *Meſure*. 3°. Les accords de ces tons ou demi-tons, avec d'autres qui en ſont éloignés dans de certaines diſtances, & qui frappent l'oreille de differens tons en même temps; ce qui s'appelle *Harmonie*.

Les accords peuvent encore être exprimés par des cordes également groſſes & également tendues: par exemple, cet accord $\frac{3}{2}$ peut être marqué par la longueur de deux cordes également groſſes & tendues; de ſorte que la longueur de la corde qui fait le ſon plus grave aura trois parties: telle que la corde qui fait le ſon plus aigu en aura deux; car il eſt à remarquer que les vibrations des cordes ſont en raiſon réciproque de leurs longueurs, c'eſt-à-dire, que la corde qui a trois parties, fait deux vibrations, & par conſéquent un ſon plus grave, tandis que celle qui a deux parties fait trois vibrations, & par conſéquent un ſon plus aigu.

PROBLEME I.

Faire ſur les accords les quatre operations de l'Arithmetique.

I.

POur ajoûter deux accords $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{5}$; on multipliera les numerateurs enſemble & les dénomi-

nateurs enſemble ; le produit $\frac{18}{10}$ ou $\frac{9}{5}$ eſt la ſomme des accords propoſés.

II.

Pour ôter un accord $\frac{6}{5}$ d'un autre $\frac{3}{2}$, on renverſera les termes de l'accord à ôter $\frac{6}{5}$, en écrivant $\frac{5}{6}$, on ajoûtera enſemble les accords $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{6}$, la ſomme $\frac{15}{12}$ ou $\frac{5}{4}$, ſera la différence des deux accords propoſés.

Remarquez que ſi l'on ôtoit un grand accord $\frac{3}{2}$ d'un petit $\frac{6}{5}$, ou auroit $\frac{12}{15}$ ou $\frac{4}{5}$, qui eſt le même accord que le précédent, mais renverſé.

III.

Pour multiplier un accord, on prendra les puiſſances des deux termes de cet accord. Si on veut doubler l'accord $\frac{3}{2}$, on prendra le quarré $\frac{9}{4}$: ſi on veut le tripler, on prendra le cube $\frac{27}{8}$, & ainſi des autres.

IV.

Pour diviſer un accord, on prendra la racine quarrée, cubique, &c. de cet accord. Ainſi pour avoir la moitié de l'accord $\frac{9}{4}$, il en faut prendre la racine quarrée $\frac{3}{2}$. De même, pour avoir le tiers de l'accord $\frac{27}{8}$, ou, ce qui eſt la même choſe pour le diviſer par 3, il en faut prendre la racine cubique, qui eſt $\frac{3}{2}$, &c.

Si on propoſoit de diviſer en quatre parties cet

accord $\frac{16}{15}$, qui n'eſt point une quatriéme puiſſance, il faudroit multiplier les termes de cet accord par 4, on auroit $\frac{64}{60}$, & prendre entre 64, 60 deux autres termes qui euſſent la même différence que les termes propoſés, comme $\frac{63}{62}$, qui ſera ſenſiblement le quart de l'accord $\frac{16}{15}$. De même, pour diviſer l'accord $\frac{33}{31}$, en 7 parties, on multipliera ces nombres par 7, & l'on aura $\frac{231}{217}$, entre leſquels on prendra $\frac{225}{223}$, qui ſera ſenſiblement la ſeptiéme partie de l'accord propoſé. Ainſi des autres.

PROBLEME II.

Exprimer les accords par Logarithmes.

POur avoir l'accord $\frac{3}{2}$ en Logarithmes, on cherchera les Logarithmes de 3 & de 2, qui ſont $\frac{0.4771212}{0.3010300}$, ou en retranchant les trois derniers chiffres des Logarithmes, on aura $\frac{0.4771}{0.3010}$, & en ôtant le petit Logarithme du grand, on aura $\frac{0.1761}{0.0000}$, ou ſimplement 0. 1761, qui exprimera en Logarithmes l'accord $\frac{3}{2}$.

REMARQUE.

Quand on a les accords exprimés en Logarithmes, on peut les ajoûter & les ſouſtraire par la regle ordinaire, c'eſt-à-dire, par l'addition & la ſouſ-

traction. Comme ſi l'on avoit ces deux Logarithmes 0. 1249 $(\frac{4}{3})$ & 1761 $(\frac{3}{2})$ on aura auſſi leur ſomme 0. 3010 en les ajoûtant enſemble, & leur différence 0. 0512 en ôtant 0. 1249 de 0. 1761. Mais pour multiplier un accord, il faut multiplier le Logarithme par le nombre propoſé : ainſi pour quadrupler l'accord 0. 1761 $(\frac{3}{2})$ on multipliera 0. 1761 par 4, & le produit 0. 7044 eſt le quadruple de l'accord propoſé $\frac{3}{2}$. Au contraire, pour diviſer un accord 0. 3010 $(\frac{2}{1})$ en douze parties, on prendra la douziéme partie du Logarithme 0. 0310, qui eſt 0. 0251.

PROBLEME III.

Partager l'intervalle de l'Octave en ſept autres intervalles ſimples, qui ſont les Tons & demi-Tons.

LE plus ſimple de tous les accords s'exprime par ce rapport $\frac{1}{1}$; il s'appelle l'Uniſſon : le rapport ſuivant $\frac{2}{1}$ s'appelle Octave. L'Uniſſon & l'Octave ont tant de rapport enſemble, que les Muſiciens les prennent indifféremment l'un pour l'autre. Cet autre rapport $\frac{4}{1}$ s'appelle double Octave ; celui-ci $\frac{8}{1}$ ſe nomme triple Octave, & ainſi de ſuite.

L'Octave peut être diviſée de deux manieres, numeriquement ou géométriquement : on donnera ces deux diviſions dans les deux articles ſuivans.

I.

Pour diviſer l'Octave numeriquement, 1°. doublez les termes de l'Octave $\frac{2}{1}$, vous aurez $\frac{4}{2}$; prenez le nombre 3, qui eſt entre les termes 2, 4, formez-en deux rapports avec les mêmes termes 4, 2, & l'Octave ſe trouvera diviſée en $\frac{3}{2}$, qui eſt la Quinte, & $\frac{4}{3}$, qui eſt la Quarte.

2°. Doublez les termes de la Quinte $\frac{3}{2}$, vous aurez $\frac{6}{4}$; prenez le nombre 5, qui eſt entre ces termes, 4, 6, formez-en deux autres rapports avec les mêmes termes 4, 6, & la Quinte ſera diviſée en $\frac{5}{4}$, qui eſt la Tierce majeure, & $\frac{6}{5}$, qui eſt la tierce mineure.

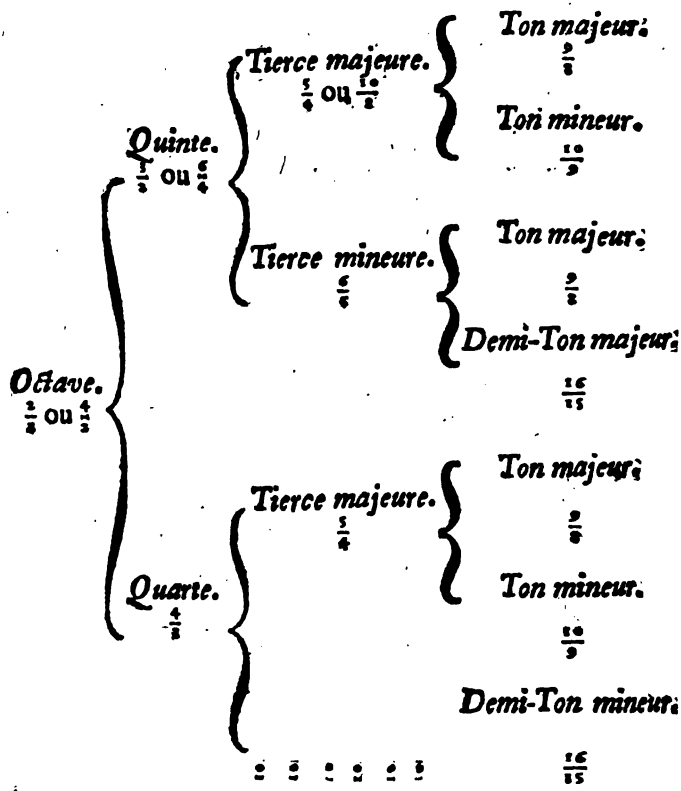
3°. Doublez les termes de la Tierce majeure, $\frac{5}{4}$; vous aurez $\frac{10}{8}$; prenez le nombre 9, qui eſt entre ces termes, 8, 10, formez-en deux rapports avec les mêmes termes, 8, 10, & la Tierce majeure ſe trouvera diviſée en $\frac{9}{8}$ qui eſt le Ton majeur, & $\frac{10}{9}$, qui eſt le Ton mineur. Ces deux Tons ſont les premieres diſſonances nées de ces diviſions.

4°. Pour trouver la diviſion de la Quarte $\frac{4}{3}$, ôtez-en * la Tierce majeure $\frac{5}{4}$, le reſte ſera le demi-Ton majeur $\frac{16}{15}$: ainſi la Quarte contiendra la Tierce majeure $\frac{5}{4}$, & le demi-Ton majeur $\frac{16}{15}$.

* Problême I. Art. II. p. 333.

5°. Pour connoître la diviſion de la Tierce mineure $\frac{6}{5}$, ôtez-en le Ton majeur $\frac{9}{8}$, le reſte ſera le demi-

C'eſt ce qu'on comprendra mieux en jettant les yeux ſur la Table qu'on a joint ici, où toutes les diviſions que contient l'Octave ſe trouvent les unes ſous les autres dans la derniere colomne à main droite. Ce qu'on dira dans l'article ſuivant ſervira encore d'éclairciſſement à ce qu'on vient de dire.



Après avoir donné la diviſion de l'Octave en nombres, on va le donner géométriquement en l'appliquant à une corde.

II.

Plan. 12. Pour diviſer l'Octave géométriquement, ſoit PB une corde tendue, & de telle longueur qu'il vous plaira. 1°. Diviſez-la également en b, le point b marquera l'Octave, c'eſt-à-dire, que ſi l'on mettoit un chevalet en b, la partie Pb fera

l'Octave avec toute la corde PB. Pour mieux entendre ce qui vient d'être dit, il faut concevoir que s'il y avoit deux cordes également groſſes & tendues, dont l'une fût égale à PB, & l'autre à Pb; PB ayant été pincée, feroit une vibration, tandis que Pb en feroit deux, ſuivant ce qu'on a dit ci-deſſus. On doit ſuppoſer la même choſe dans la ſuite.

Il faut faire attention que les deux moitiés de la corde ſéparées par le chevalet forment l'uniſſon qu'on a dit être exprimée par ce rapport $\frac{1}{1}$.

2°. Diviſez bB également en E, alors PE fera la Quinte avec Pb, & la Quarte avec PB.

3°. Partagez également bE en G, alors PG fera la Tierce majeure avec Pb, & le Ton mineur avec PG.

4°. Diviſez bG également en A, alors PA fera le Ton majeur avec Pb, & la Tierce mineure avec PE.

5°. Partagez PG en huit parties égales, & faites GF égale à une de ces huit parties, alors PF fera un Ton majeur avec PG, & un demi-Ton majeur avec PE.

6°. Diviſez PE en quatre parties égales, portez-en une en EC, alors PC fera avec PB un demi-Ton majeur, & avec PE une Tierce majeure. Cette quatriéme partie eſt la diſtance AE.

7°. Diviſez EC également en D, alors PD fera le Ton majeur avec PE, & le Ton mineur avec PC.

L'Octave ſe trouve ainſi diviſée en 7 intervalles ou 7 accords, qui ſont trois Tons majeurs, deux Tons mineurs & deux demi-Tons majeurs. Si on prend Pc moitié de PC, qui eſt ſon Octave, au

lieu des diviſions de l'Octave Bb, on aura l'Octave Cc, qui contiendra les mêmes intervalles.

REMARQUES.

On a ajouté aux diviſions qu'on vient de faire de la corde PB, des nombres, qui étant comparés les uns aux autres, ſuivant ce qu'on vient de dire, expriment les accords qu'on a trouvé dans l'article précédent. On a d'abord l'Octave $\frac{64}{32}$, & les autres accords comme la Quinte $\frac{48}{32}$, la Quarte $\frac{64}{48}$, &c. Mais en prenant 30, moitié de 60, au lieu d'avoir l'Octave de 32 à 64, on a l'Octave de 30 à 60.

L'Octave & ſes diviſions priſes entre les nombres 30 & 60, s'accorde avec les noms particuliers qu'Aretin, Moine Benedictin, a donné aux ſons différens de ces diviſions. On les a marqué dans la figure, quoiqu'ils ſoient aſſez connus; on ſçait qu'ils ont été tirés des premieres ſyllabes de chaque hemiſtiche de l'Hymne de S. Jean.

UT queant laxis, REſonare fibris,
MIra geſtorum FAmuli tuorum,
SOLve polluti LAbii reatum,
Sancte Joannes.

Si on double les nombres qui ſont entre 30 & 60, on aura une ſeconde Octave diviſée en ſes accords: on auroit une troiſiéme Octave en doublant les nombres de cette ſeconde Octave; & ainſi de ſuite pour avoir autant d'Octaves qu'on voudra.

PROBLEME IV.

Meſurer la durée des Tons.

POur meſurer le tems qu'on employe à marquer les Tons ſelon leur durée, il faut concevoir un mouvement précipité très-égal, comme le battement de l'artere, ou la vibration d'un pendule, & comptant 1, 2, 3, 4, recommencer toujours à compter de quatre en quatre, afin de ſe faire une juſte idée de ce qu'on appelle un Temps de la Muſique.

On doit enſuite s'accoutumer la main droite à marquer un mouvement à peu près ſemblable à celui qui vient d'être expliqué, en l'abbaiſſant & comptant un; en l'élevant un peu en dehors, & comptant deux; puis trois en la retirant un peu vers ſoi; enfin quatre, en l'élevant un peu au deſſus de l'endroit où elle étoit au premier Temps, obſervant que les quatre divers mouvemens ſoient égaux, on la replacera également où elle étoit au premier: d'où on recommencera à compter 1, 2, 3, 4. Il eſt néceſſaire de s'habituer à ce mouvement, qui ſert de baſe à tous les autres qui ſe font dans la Muſique, ou qui en dépendent.

REMARQUES.

Outre ce mouvement reglé de quatre en quatre, il y a encore une autre meſure qui ſe regle de trois en trois; en ſorte qu'après avoir compté un en baiſſant la main, on compte deux, comme au ſecond Temps de la Meſure ci-devant; mais le troiſiéme ſe compte en élevant la main: après quoi

on recommence à compter 1, 2, 3, comme la premiere fois ; & ainſi de ſuite.

La durée d'un Ton eſt reglée par un ou pluſieurs de ces Temps, ou par la moitié, le quart ou la douziéme partie d'un temps, ainſi qu'on le marque par les notes ou caracteres qui ſont uſités dans la Muſique.

PROBLEME V.

Faire trembler ſenſiblement & à vûe d'œil la corde d'une Baſſe de Viole, ou de quelqu'autre Inſtrument, ſans que perſonne y touche.

PRenez une Baſſe de Viole, ou autre ſemblable Inſtrument de Muſique ; choiſiſſez deux cordes tellement éloignées l'une de l'autre, qu'il y en ait une entre deux : accordez ces deux cordes, ſans toucher à celle du milieu. Enſuite touchez un peu fort avec l'archet ſur la plus groſſe corde, & vous verrez qu'en même temps que celle-ci tremblera, celle qui en eſt éloignée, mais accordée au même Ton, tremblera auſſi ſenſiblement, ſans qu'on y touche. Ce qui eſt très-remarquable, c'eſt que la corde qui ſera au milieu n'aura aucun mouvement, & qu'auſſi-tôt qu'on aura mis la groſſe corde ſur un autre Ton, en lâchant ou ſerrant la cheville, ou bien en mettant le doigt ſur quelque endroit de cette corde, l'autre ne tremblera plus. La choſe paroîtra encore plus merveilleuſe, ſi on l'execute ſur deux Baſſes de Viole.

REMARQUES.

Cette merveille ne vient que de ce que ces deux cordes ſont tellement tendues, que les vibrations

de l'une répondent aux vibrations de l'autre, en ſorte que la premiere étant ébranlée, la ſeconde ſe trouve auſſi ébranlée par l'entremiſe de l'air, qui reçoit les mêmes frémiſſemens que la groſſe corde, & les communique à l'autre par des vibrations qui leur conviennent; au lieu que la corde du milieu n'étant point accordée avec les deux autres, n'eſt pas ſuſceptible des mêmes vibrations, & par conſéquent ne reçoit aucun mouvement.

On remarque le même effet ſur deux verres que l'on met à l'uniſſon, en verſant de l'eau peu à peu dans celui qui a le ſon plus clair: ſi on frotte le bord de l'un de ces verres avec le doigt mouillé, en ſorte que l'on forme un ſon par ce frottement, l'autre verre, qui doit être aſſez proche, ſera ébranlé: ce que l'on connoîtra par le mouvement d'une épingle tortuée qu'on mettra ſur le bord.

De même ſi deux Timbales ſont à l'uniſſon, & que l'on frappe l'une des deux avec leur bâton, on fera ſauter de la monnoye qu'on aura miſe ſur l'autre. On obſerve encore qu'en battant du Tambour, les vitres qui ſont à l'uniſſon, en ſont ébranlées, & que dans les lieux où l'on joue d'une Baſſe de Violon, ou de quelque autre Inſtrument fort, en mettant la main ſur des planches, ſur la forme d'un chapeau, ou ſur d'autres corps un peu fermes & minces, on les fait frémir, lorſque l'on produit le ſon ſur des cordes qui ſont à l'uniſſon avec ces corps.

On ajoutera ici comme une choſe très-curieuſe, que deux pendules poſées ſur une même tablette, s'accorderont à aller à la même heure, quoique leurs aiguilles n'ayent point été miſes d'abord à la même heure.

AVERTISSEMENT.

M. Sauveur a inventé un ſyſtême de Muſique; il diviſe l'Octave en 43 parties, qu'il appelle Merides, & ces Merides ſont encore diviſées en ſept Heptamerides, de ſorte que l'Octave contient 301 Heptamerides: Il exprime tous les accords par Merides & Heptamerides, & il donne des noms de lettres aux différens ſons de l'Octave. Ainſi au lieu de UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, UT, il a imaginé ſept noms PA, RA, GA, FO, BO, LO, DO, PA, qu'il applique aux ſept ſecondes de l'Octave, dont chaque Ton contient 7 Merides, chaque demi-Ton 4 Merides. Pour exprimer les Merides & les Heptamerides, & pour varier les Tons, il change les voyelles de cette Gamme en d'autres voyelles, ſelon qu'il veut abbaiſſer ou élever ces Tons.

Il a encore inventé des notes qui répondent aux différens noms, dont ſa Gamme eſt ſuſceptible par les changemens de voyelles dont on vient de parler. Ces notes reçoivent auſſi divers changemens, ſoit pour exprimer la durée du Temps, ſoit pour exprimer les Merides, Heptamerides, & même les demi-Heptamerides, par rapport à l'élevation & à l'abbaiſſement des Tons. Elles ſe rangent ſur une ſeule ligne, au commençement de laquelle on met une des Clefs, qui ſont encore de l'invention de M. Sauveur, & qui ſervent à marquer les différentes Octaves. On peut conſulter ſur ce nouveau Syſtême le Mémoire de l'Academie Royale des Sciences aux années 1701 & 1702.

PROBLEMES D'OPTIQUE.

L'Optique eſt une ſcience qui conſidere les proprietés de la lumiere, & par conſéquent les couleurs : elle comprend tout ce qui ſert d'objet à la vûe.

La lumiere conſiderée en elle-même, peut-être regardée de trois différentes manieres, 1°. En tant qu'elle eſt directe, c'eſt à-dire, que ſes rayons ſont envoyés du corps lumineux ou coloré vers l'œil. 2°. En tant qu'elle eſt reflechie, c'eſt-à-dire, que ſes rayons ayant frappé quelque corps poli, comme un miroir, ils ſont renvoyés vers l'œil. 3° En tant qu'elle eſt rompue, c'eſt à-dire, que ſes rayons ayant rencontré un corps tranſparent, ils le pénétrent en ſe briſant.

La premiere maniere de conſidérer la lumiere ; ſert d'objet à la perſpective, qui trompe agréablement l'imagination. Cette partie de l'Optique nous apprend à tracer géométriquement ſur un plan la repréſentation des objets ſelon leurs dimenſions & leurs ſituations différentes ; en ſorte que ces repréſentations faſſent ſur nos yeux le même effet que feroient les objets mêmes dont elles ne ſont que les images.

On examine la lumiere réflechie dans la Catoptrique, qui conſidere les proprietés des Miroirs plats, convexes & concaves. Cette partie ſuppoſe

que l'angle de réflexion eſt égal à l'angle d'incidence.

La Dioptrique conſidere les proprietés de la lumiere rompue. L'expérience apprend qu'un rayon de lumiere paſſant obliquement d'un milieu dans un autre, ſe détourne en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire. Il s'en éloigne ſi le milieu dans lequel il entre, eſt plus difficile à pénétrer que celui dans lequel il eſt; mais il s'en approche, ſi le milieu dans lequel il paſſe eſt plus aiſé à pénétrer que celui qu'il quitte.

L'Optique ſuppoſe auſſi que les objets qui ſont vûs ſous de plus petits angles, paroiſſent plus petits; ce qui arrive ordinairement, lorſqu'ils ſont plus éloignés. Sur ces ſuppoſitions, nous réſoudrons pluſieurs Problêmes utiles & agréables, comme vous allez voir.

PROBLEME I.

Faire qu'un objet, étant vû de loin, ou de près, paroiſſe toujours de la même grandeur.

Plan. 11. Fig. 47. POur faire que la ligne AB paroiſſe d'une même grandeur, lorſqu'elle ſera miſe en différens lieux plus ou moins éloignés de l'œil placé en C, il faut décrire un cercle dont la circonférence paſſera par l'œil, & mettre la ligne AB en tel endroit de la circonférence qu'il plaira, comme vous le voyez en ED & AB. Cette ligne étant en ED, qui eſt la ſituation la plus éloignée de l'œil, paroîtra de la même grandeur que ſi elle étoit en AB, qui eſt beaucoup plus proche : car l'œil arrêté en C, voit ces deux lignes égales AB, DE, ſous les angles égaux ACB, DCE.

REMARQUE.

Il eſt évident que la ligne propoſée AB ſera toujours vûe ſous un même angle, & que par conſéquent elle paroîtra toujours d'une même grandeur à quelque diſtance que l'œil ſoit de cette ligne, pourvû qu'il ne quitte jamais la circonférence du cercle qui paſſe par les deux extrêmités A, B: ainſi ſans changer la ſituation de la ligne AB, on peut changer celle de l'œil, en le plaçant en tel point qu'on voudra de la circonférence d'un cercle quelconque qui paſſe par les deux extrêmités de la ligne, ou grandeur propoſée AB, comme en F, ou en G: les angles viſuels AFB, AGB, ACB, étant toujours égaux.

Il eſt auſſi évident qu'une même ligne AB paroîtra toûjours de la même grandeur en l'approchant de l'œil C, ſans la placer dans la circonférence d'un cercle, pourvû que ſes deux extrêmités demeurent toujours dans les mêmes rayons viſuels AC, BC, comme il arrive en lui donnant la ſituation AD; parce que dans cette ſituation elle eſt vûe ſous le même angle viſuel ACB; ce qui ne doit point changer ſa grandeur apparente, quoiqu'elle ſoit plus proche de l'œil C. Plan. 11. Fig. 50.

PROBLEME II.

La ligne AC étant donnée, & la ligne CZ indéterminée étant perpendiculaire ſur AC à ſon extrêmité C, trouver dans la ligne CZ un point D, d'où la partie AB de la ligne AC ſoit vûe la plus grande qu'elle puiſſe être vûe dans toute l'étendue de la ligne CZ.

DIviſez la ligne AB au point F en deux parties égales AF, FB; des points A & B com- Plan. 12. Fig. 7.

me centre, & de l'intervalle FC, décrivez deux arcs de cercles qui ſe couperont en G, du point G menez ſur CZ la perpendiculaire GD : le point D ſera celui où l'œil étant placé, il verra la ligne AB la plus grande qu'il la puiſſe voir dans toute l'étendue de la ligne indéterminée CZ : car ayant décrit le cercle ABD, il eſt aiſé de démontrer que l'angle ADB eſt le plus grand de tous ceux dont le ſommet ſera dans la ligne CZ, & qui auront pour baſe la ligne AB. Tous les angles, qui ſont au deſſus ou au deſſous de D, ſont plus petits que celui qui eſt en D.

REMARQUE.

Il eſt clair qu'en quelque point du plus grand arc ADB on place l'œil, la ligne AB ſera vûe d'une même grandeur, puiſqu'elle ſera vûe ſous le même angle.

PROBLEME III.

L'œil étant placé en un point comme B, & regardant vers la ligne AE, couper de cette ligne la partie DE, qui ſoit vûe de la même grandeur qu'une autre partie AC de la même ligne AE.

Plan. 12. Fig. 8. AYant tiré les lignes BA, BC, BE, du point B, comme centre & de l'intervalle BI, pris à volonté, décrivez l'arc de cercle IFH ; faites GH égal à IF ; par le point G menez la ligne BGD, la partie DE ſera vûe de la même grandeur que la partie AC, puiſqu'elles ſont vûes ſous les mêmes angles.

REMARQUES.

C'eſt par cette égalité des angles viſuels, que l'on peut écrire contre une muraille des caracteres, qui bien qu'inégaux, paroîtront égaux, étant vûs d'un certain point, & que l'on peut placer ſur un pinacle, ou ſur quelque haut frontiſpice une ſtatue d'une telle longueur & d'une telle groſſeur, qu'étant vûe d'en bas, elle paroiſſe d'une grandeur proportionnée à la hauteur du lieu, ſans qu'il ſoit beſoin de polir extrêmement cette figure, & encore moins de s'arrêter aux muſcles du corps, ni aux plis de la draperie, comme l'on feroit ſi la figure ſe voyoit de plus près.

Lorſqu'on voudra exécuter ce Problême ſur une muraille, il faudra d'abord l'executer ſur le papier: mais on doit prendre la diſtance du point de vûe à la muraille, & la hauteur de la muraille ou de ſes parties, afin de rapporter ces meſures ſur le papier par le moyen d'une échelle. On portera les diſtances trouvées ſur le papier à la muraille, en obſervant de donner autant de toiſes ou de pieds ſur la muraille, qu'on aura trouvé ſur le papier de parties qui correſpondent dans l'échelle aux toiſes, pieds, pouces, &c.

PROBLEME IV.

Trouver un point, duquel deux parties inégales d'une ligne droite paroiſſent égales.

Il y a une infinité de points différens, d'où les deux parties inégales AB, BC, de la ligne droite AC, étant vûes, peuvent paroître égales, parce qu'ils ſont dans la circonférence d'un cercle: mais Plan. 11. Fig. 49.

ſans nous arrêter à la Theorie, nous enſeignerons ici une méthode très-courte pour trouver un de ces points, comme vous allez voir.

Décrivez des deux extrêmités A, B, & de l'intervalle AB deux arcs de cercle, qui ſe coupent ici au point D, d'où il faudra décrire avec la même ouverture de Compas un autre arc de cercle vers F. De même décrivez pareillement des deux extrêmités B, C, & de l'intervalle BC, deux arcs de cercle, qui ſe coupent ici au point E, & décrivez de ce point E, avec la même ouverture de Compas un autre arc de cercle, qui coupe ici en F celui que vous avez décrit du point D. Ce point F ſera celui duquel les deux lignes propoſées AB, BC, étant vûes, paroîtront égales, à cauſe de l'égalité des deux angles viſuels AFB, BFC.

REMARQUE.

On operera de la même façon, lorſque les deux extrêmités des deux lignes propoſées AB, BC, ne ſe joindront pas. Nous avons enſeigné dans notre *Dictionnaire Mathematique*, la maniere de trouver un point, duquel trois parties inégales d'une ligne droite, étant vûes, paroîtront égales.

PROBLEME V.

Un Anneau étant placé à une certaine diſtance, propoſer de l'enfiler avec une Baguette recourbée par l'une de ſes extrémités.

IL faut 1°. que celui qui ſe prépare à enfiler l'Anneau, puiſſe le toucher avec la Baguette. 2°. Qu'il n'en voye point l'ouverture. * 3°. Qu'il

* C'eſt-à-dire, que l'Anneau doit lui préſenter ſon bord,

ferme un œil. 4°. Qu'il eſſaye à enfiler l'Anneau avec le bout recourbé de la Baguette.

Il n'eſt pas aiſé d'enfiler cet Anneau aux conditions qu'on vient de marquer. Cette difficulté vient de ce qu'avec un œil ſeul on ne peut pas juger de la diſtance des objets.

PROBLEME VI.

Repreſenter en perſpective tel objet que l'on voudra, ſans ſe ſervir de point de vûe.

PRemierement, pour trouver dans le Tableau l'apparence de quelque point du plan Geométral, par exemple, du point E, tirez de ce point E, la ligne EG perpendiculaire à la ligne de terre CD. Portez la longueur de cette perpendiculaire GE, de part & d'autre du point G, ſur la même ligne de terre CD, aux points F, D. Après cela ayant pris à volonté ſur la ligne horiſontale AB, les deux points de diſtance A, B, tirez de ces deux points A, B, par les points D, F, les droites AD, BF, qui donneront par leur interſection l'apparence H du point propoſé E. Plan. 132 Fig. 55.

C'eſt de la même façon que l'on trouvera l'apparence de quelqu'autre point du plan Géométral, & par conſéquent la repréſentation de la baſe de quelque corps que ce ſoit, lequel ſe pourra repreſenter en perſpective en tirant de tous les points de ſon aſſiette, ou plan perſpectif des lignes perpendiculaires à la ligne de terre CD, & égales en apparence à la hauteur du corps propoſé; ce qui ſe fera en cette ſorte.

Ayant porté la hauteur naturelle du corps propoſé, ſur la ligne de terre CD, par exemple, de

C en K, tirez de ces deux points C, K, au point L pris à diſcrétion ſur la ligne horiſontale AB, les droites LC, LK, qui termineront les hauteurs apparentes de tous les points du corps propoſé, en tirant de ces points des lignes paralleles à la ligne de terre CD. Comme pour trouver la hauteur du point H; on tirera de ce point H une ligne parallele à CD, qui coupera le Triangle LCK, & donnera MN. On portera cette longueur MN en HO, qu'on fera perpendiculaire à CD. Cette ligne HO ſera la hauteur apparente du corps repréſenté dans le Tableau.

On fera la même choſe à l'égard de tous les autres points du plan perſpectif, & les lignes tirées de ces points parallelement à CD, donneront dans le Triangle LCK les hauteurs apparentes, qu'il faut élever perpendiculairement à CD à chaque point du plan perſpectif, comme on vient de le faire.

PROBLEME VII.

Repreſenter en perſpective un Poliedre équilatéral, terminé par ſix quarrés egaux, & par huit exagones réguliers & egaux entr'eux.

Plan. 14. Fig. 56. CEux qui entendent la perſpective repreſenteront facilement ce corps dans le Tableau, dont le point de vûe eſt V, & un des deux points de diſtance eſt D, marqué ſur la ligne horiſontale DV, qui eſt paralleleà la ligne de terre AB, pourvû qu'ils en ſçachent décrire le plan & le profil; ce qui ſe fera en cette ſorte.

Premierement, ſi l'on veut que ce corps s'appuye ſur l'un de ſes huit exagones, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, on décrira de ſon centre C un cercle

cle dont le rayon ou demi-diametre C8, ou C9, soit tel, que son quarré soit au quarré de celui de l'exagone, comme 7 est à 3; de sorte que si le rayon ou le côté 1, 2, de l'exagone est de 65466 parties égales, le rayon C8, ou C9, du grand cercle en contiendra 100000. Pl. 14, fig. 56.

Ayant donc ainsi décrit ce grand cercle, on le divisera inégalement, comme vous voyez dans la figure, en sorte que le plus petit côté 8, 9, & les autres cinq, soient égaux chacun au côté de l'exagone, & que le plus grand 7, 10, & les cinq autres soient doubles chacun du plus petit; auquel cas, le plus petit soutiendra un arc de 38, 12′, & le plus grand, ou son double, un arc de 81, 48′. Mais sans cela il sera aisé de décrire ce plan par la seule inspection de la figure.

Pour le profil, décrivez autour du plus petit côté 21, 15, le demi-cercle 21, O, 15, & ayant décrit du point 4, par le point 15, l'arc de cercle 15, O, joignez la droite 21 O, qui sera la hauteur des points 9, 8, 14, 13, 20, 17; la hauteur des points 7, 12, 15, 21, 16, 10, étant égale au double de la ligne 21 O, & la hauteur des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, étant au triple de la même ligne 21 O.

Si l'on met en perspective ce plan ainsi décrit, & que de tous ses angles on éleve des perpendiculaires à la ligne de terre, pour y mettre les hauteurs convenables à celles du profil, il n'y aura plus qu'à joindre les côtés, comme vous voyez dans la figure 56, & encore mieux dans la 57 *fig.* que nous avons représentée en plus grand volume, pour vous faire mieux distinguer les côtés qu'il faut joindre, dont ceux qui sont marqués par des lignes noires, sont ceux qui paroissent à l'œil, & Pl. 15, fig. 57.

les autres qui ſont marqués par des lignes ponctuées, ſont ceux qu'on ne voit pas.

Secondement, ſi l'on veut que le corps s'appuye ſur l'une de ſes ſix ſurfaces quarrées, comme ſur le quarré *a b*, 15 21, le plan, ou l'aſſiette de ce polyedre changera, & elle ſera telle que vous la voyez dans la figure 58, qu'il ne faut que regarder pour la comprendre, pour le moins, quand on ſçaura que le grand côté de l'octogone irrégulier, comme *d* 12 eſt égal à la diagonale *a* 15, ou *b* 21 du quarré intérieur qui ſert de baſe au polyedre.

Pl. 15. fig. 58.

Le profil change auſſi, car la hauteur des points 3, 7, 10, 6, eſt égale à la moitié *cd* du grand côté *d* 12 de l'octogone irrégulier, la hauteur des points 4, 5, 17, 16, *m*, *d*, eſt égale au côté entier *d* 12, la hauteur des points 14, 20, *n*, *c*, eſt égale au même côté *d* 12, & à ſa moitié *cd*; enfin la hauteur des points *a*, *b*, 15 21, eſt double du même côté *d* 12, dont le quarré eſt au quarré du rayon de l'octogone irrégulier, comme 4 eſt à 5; ce qui fait que ſi le rayon eſt de 100000 parties égales, le grand côté *d* 12 en contient 89442, & ſoutient un arc de 53, 8′, & que le petit côté *dm* en comprend 63245, & ſoutient un arc de 36, 56′. Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous avons mis le polyedre en perſpective, comme vous voyez dans la 59 *fig.*

Pl. 16. fig. 59.

PROBLEME VIII.

Repréſenter en perſpective un polyedre équilatéral, terminé par ſix quarrés égaux, & par huit triangles équilatéraux, & égaux entre eux.

SI vous voulez que le polyedre s'appuie ſur l'un de ſes ſix quarrés égaux, comme 9, 10, 11, 12, il n'y aura qu'à lui circonſcrire un autre quarré, & le plan ſera achevé, dont le profil eſt tel. Pl. 16. fig. 60.

La hauteur des points 5, 6, 7, 8, eſt égale à la moitié 3, 5, du côté 6, 5, du quarré circonſcrit, & la hauteur des points 1, 2, 3, 4, eſt égale au côté entier 6, 5, ou à la diagonale 11, 9, ou 10, 12, du quarré inſcrit, qui ſert de baſe au polyedre.

Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous avons mis ce polyedre en perſpective, comme vous voyez dans la 61 *fig.* qui vous fait voir diſtinctement les côtés qu'il faut joindre, quand on a trouvé dans le tableau l'apparence des points qui bornent leurs extrêmités. Pl. 17. fig. 61.

PROBLEME IX.

Repréſenter en perſpective un polyedre équilatéral, terminé par ſix quarrés égaux, & par douze triangles iſoſceles & égaux entre eux; dont la hauteur eſt égale à la baſe.

PRemierement, ſi vous voulez que le polyedre s'appuie ſur l'un de ſes ſix quarrés égaux, comme 3, 6, 9, 12, ſon aſſiette ſera telle que vous la voyez dans la figure, où les demi-cercles Pl. 17. fig. 62.

qui ſont décrits des quatre angles droits de la baſe 3, 6, 9, 12, des milieux A, B, des deux côtés oppoſés 5, 2, & 12, 9, font aſſez connoître la deſcription de ce plan, ſans qu'il ſoit beſoin d'en parler davantage.

Pour le profil, nous dirons que la hauteur des points 4, 11, 7, 8, 1, 14, eſt égale à la touchante 7, 15, & que la hauteur des points 5, 6, 13, 12, eſt double de la précédente, c'eſt-à-dire, double de la même touchante 7, 15. Après quoi il n'y a plus qu'à regarder la 63 *fig.* pour comprendre la maniere de repréſenter ce polyedre en perſpective, que je vous repréſente encore tout ombré, & vu d'une autre façon, dans la 64 *fig.*

Pl. 18, fig. 63.

Pl. 19. fig. 64.

Secondement, ſi vous voulez que le polyedre ſoit élevé droit ſur l'un de ſes angles ſolides, comme 1, auquel cas ſon aſſiette ſera le ſimple exagone régulier, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dont le centre ſera le point 1, & le profil ſera tel.

Fig. 65.

La hauteur des points 8, 9, 10, 11, 12, 13, eſt égale à la moitié du côté de l'exagone: la hauteur des points 2, 3, 4, 5, 6, 7, eſt égale au triple de la précédente, c'eſt-à-dire, à trois moitiés du côté de l'exagone: & la hauteur du point 1 eſt double du côté de l'exagone, ou égal au diametre 4, 7.

Je n'enſeignerai pas ici la maniere de repréſenter en perſpective ce polyedre ſelon ſon plan & ſon profil, parce que nous en avons ſuffiſamment parlé dans notre *traité de perſpective*; c'eſt pourquoi je me contenterai de vous en donner ſimplement ici la figure.

Pl. 20. fig. 66.

PROBLEME X.

Repréſenter en perſpective un polyedre équilatéral, terminé par douze quarrés égaux, par huit exagones réguliers & égaux, & par ſix octogones réguliers & égaux.

SI vous voulez que la baſe de ce corps ſoit l'un de ſes ſix octogones comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont le centre eſt O, joignez les extrêmités de deux côtés oppoſés & paralleles par des lignes droites paralleles entre elles, qui par leurs mutuelles interſections, formeront un quarré, comme ABCD. Prolongez les deux côtés oppoſés & paralleles, 1, 2, 5, & 6, & pareillement les deux côtés oppoſés & paralleles 3, 4, 7 & 8, qui, en rencontrant les deux premiers, formeront un autre quarré plus grand EFGH. Après quoi il ſera facile d'achever le plan; ſçavoir, en faiſant la ligne E 20, égale à la partie E 7, &c. Pl. 21. fig. 68.

Pour une deſcription plus exacte de ce plan, on conſidérera qu'en ſuppoſant le rayon O1, ou O2, de 1000 parties égales, le rayon O13, ou O16, du cercle moyen, comprend 1514 de ces parties, & que le rayon O12, ou O15 du plus grand cercle en contient 1731. Que le plus petit côté ſoutient dans le plus grand cercle un arc 11, 12, ou 14, 15, de 25 degrés 32′; dans le moyen un arc 1, 2, de 19 degrés 16′; & dans le plus petit un arc 12, de 45 degrés. Et que le plus grand côté ſoutient dans le plus grand cercle un arc 14, 11, de 64 degrés 28′; & dans le cercle moyen un arc 10, 13, ou 9, 16, de 60 degrés 44′, dont la corde eſt égale au plus petit côté 9, 10.

Pour le profil, on donnera toute la ligne 15, 12, à la hauteur des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont l'aſſiette eſt l'octogone intérieur, ou le plus petit octogone régulier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. On donnera la partie 15 G, à la hauteur des points 9, 10, 13, 25, 22, 21, 18, 16, dont l'aſſiette eſt l'octogone moyen. On donnera la partie 15, 2, à la hauteur des points 14, 11, 12, 24, 23, 20, 19, 15, dont l'aſſiette eſt le plus grand octogone. On donnera la partie 15, 1, à la hauteur des points 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39, dont l'aſſiette eſt le plus grand octogone. Enfin l'on donnera la partie 15, H, à la hauteur des points 40, 41, 28, 29, 32, 33, 36, 37, dont l'aſſiette eſt l'octogone moyen.

La hauteur 15, 12, ſe trouvera de 2930 parties, dont le rayon O1 du plus petit octogone en contient 1000. La hauteur 15, G, eſt de 2389 ſemblables parties: la hauteur 15, 2, en contient 1848: la hauteur 15, 1, comprend 1082: enfin la hauteur 15 H, en contient 541.

Pl. 22. fig. 70. Quand on aura mis en perſpective le plan de ce polyedre terminé par 26 faces, & qu'on aura déterminé la poſition de ſes angles ſolides ſuivant leurs hauteurs différentes, que le profil précédent vous donne, on joindra ces angles ſolides par des lignes droites, qui ſeront les côtés égaux du polyedre, comme vous voyez dans la figure, qu'il ſuffit de regarder pour la comprendre.

Des miroirs plats.

Ce qu'on va dire des miroirs plats, doit s'entendre des miroirs de glaces, quoiqu'on puiſſe en appliquer une grande partie à ceux de fonte, d'acier, &c.

PROBLEME XI.

Un point de quelque objet & le lieu de l'œil, étant donnés, trouver le point de réflexion ſur la ſurface d'un miroir plat.

SOit B un point de l'objet, A l'œil, & le miroir repréſenté par la ligne CD. Du point B menez à CD la perpendiculaire BD que vous prolongerez juſqu'en F, en ſorte que DF ſoit égale à DB. Par les points F & A, tirez la ligne AF, qui coupera CD en E. Ce point E ſera le point de réflexion cherché : de ſorte que ſi l'on tire les deux lignes AE, BE, l'angle de réflexion AEC ſera égal à l'angle d'incidence BED, comme il eſt aiſé de le démontrer. Pl. 11, fig 51.

REMARQUE.

Dans notre *dictionnaire de mathématique* on trouve ce problême appliqué à un miroir ſphérique : mais il ſe peut aiſément appliquer au jeu de billard. Suppoſons que la ligne CD repréſente un bord du billard, & qu'aux deux points A, B, du tapis ou table du même billard, il y ait deux billes, dont l'une, comme A, ne peut être envoyée directement contre l'autre B, à cauſe du fer qui eſt entre deux. On trouvera le point E, comme il vient d'être enſeigné, & ce point E ſera celui où le joueur envoyera la bille A, afin que par une bricole elle puiſſe toucher l'autre bille qui ſera en B. Mais dans la pratique, cela ſe peut exécuter plus facilement en cette ſorte.

On trouvera, dis-je, le point E, en prolon-

geant par la penſée la perpendiculaire BD juſqu'en F, en ſorte que la ligne DF ſoit égale à cette perpendiculaire BD, & en ayant mis en F une marque viſible, le joueur pouſſera ſa bille A, ſelon la ligne AF. Alors cette bille A, rencontrant le bord du billard en E, ſe réfléchira, & ira rencontrer la bille B; mais on doit obſerver de pouſſer fortement la bille A, pour ſurmonter les défauts du billard.

Comme dans ce jeu il n'eſt pas toujours facile, ni même permis de mettre une marque viſible en F, parce que l'adverſaire a la liberté de l'ôter, il faut que le joueur viſe du point F la bille A, & qu'il remarque par le rayon viſuel FA, le point E ſur le bord du billard, où il doit envoyer ſa bille pour la faire réfléchir en B.

Si vous voulez trouver le point E de réflexion, pour faire que la bille A rencontre la bille B par deux bricolles, tirez du point A, la ligne AC, parallele à la ligne DG, & du point B, la ligne BG parallele à la ligne CD. Cherchez à la ſomme des deux lignes paralleles AC, GD, à la ligne AC, & à la ſomme des deux lignes paralleles CD, BG, une quatrieme proportionnelle, dont la longueur étant portée en CE, donnera le point E qu'on cherche.

Pl. 11. fig. 52.

PROBLEME XII.

Tirer par derriere l'épaule un piſtolet auſſi juſtement que ſi on le couchoit en joue.

Pl. 13. fig. 53.

SOit AB une ligne qui repréſente le miroir, & CD la perpendiculaire menée à ce miroir de C, but où l'on veut tirer. Soit encore D l'image ou apparence de ce but, qui paroîtra ſur cette per-

pendiculaire auſſi éloignée au-delà du miroir, que le but C l'eſt en deçà. Soit enfin l'œil placé en E, qui regarde le but en D par la ligne de réflexion EFD. Le rayon d'incidence ſera la ligne CF, ſelon laquelle il faut placer le piſtolet GH derriere l'épaule, & le tourner de maniere que ſon apparence IK convienne avec la ligne de réflexion EFD, & ſoit dirigée vers l'apparence D du but C. Le piſtolet GH ainſi tourné regardera directement le but C & ne manquera point de le frapper, ſi on lâche le coup.

PROBLEME XIII.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion ſur la ſurface d'un miroir plan, étant donnés, déterminer le lieu où l'on doit voir l'image de l'objet propoſé.

SI l'œil eſt A, l'objet B, & E le point de réflexion ſur la ſurface CD d'un miroir plan, tirez de l'objet B, la ligne indéfinie BF, perpendiculaire à cette ſurface, & prolongez le rayon de réflexion AE, juſqu'à ce qu'il rencontre cette perpendiculaire en un point, comme F; ou bien faites DF égal à DB. Le point F ſera le lieu de l'image de l'objet B, c'eſt-à-dire, le point où l'objet B ſera vu par l'œil A, dans le miroir plan CD: car l'optique apprend que l'image d'un objet ſe fait au concours du rayon de réflexion & d'une ligne droite tirée de l'objet perpendiculairement à la ſurface du miroir, ſoit que cette ſurface ſoit plane, ſoit qu'elle ſoit ſphérique. Pl. 11. fig. 51.

D'où il eſt aiſé de conclure, par l'égalité des angles de réflexion & d'incidence, que quand le

Pl. 11. fig. 51. miroir eſt plan, comme nous le ſuppoſons ici, l'objet doit être vu auſſi enfoncé dans le miroir, qu'il en eſt éloigné; & c'eſt à cauſe de cela que nous avons fait la ligne DF égale à la perpendiculaire DB.

Il s'enſuit auſſi que la diſtance AF de l'image E eſt égale au rayon d'incidence BE & au rayon de réflexion AE, parce que le rayon d'incidence BE eſt égal à la ligne EF, à cauſe de l'égalité des deux triangles rectangles EDB, EDF.

Il s'enſuit encore que ſi l'œil A s'approche ou s'éloigne dans le même rayon de réflexion AE du point de réflexion E d'une certaine quantité, l'image F de l'objet B ſera approchée ou éloignée de l'œil A de la même quantité; parce que la diſtance EF demeurant toujours la même, la diſtance AF croîtra ou décroîtra comme la diſtance AE.

Il s'enſuit de plus que quand le miroir plan eſt parallele à l'horiſon, comme CD, une grandeur perpendiculaire à l'horiſon, comme BD, doit paroître renverſée; & que quand le miroir plan eſt perpendiculaire à l'horiſon, la main droite d'une perſonne lui doit paroître à la gauche de ſon image, & la gauche à la droite.

Enfin il s'enſuit que la diſtance de l'œil à l'image de quelque objet vu dans le dernier miroir par pluſieurs réflexions, à l'aide de pluſieurs miroirs plans, eſt égale à la ſomme de tous les rayons d'incidence & de réflexion, & qu'un objet ſe peut quelquefois multiplier dans un miroir plan, lorſqu'il eſt de verre.

C'eſt ainſi que l'on voit quelquefois qu'un flambeau allumé paroît double dans un miroir plan de verre un peu épais, à cauſe de la double réflexion qui s'y fait, l'une ſur la ſurface extérieure du mi-

roir, & l'autre ſur le fond du même miroir. Car la lumiere ne ſe réfléchiſſant pas toute ſur la ſurface extérieure du miroîr, elle pénetre la glace, & va rencontrer cette feuille d'étain qu'on met derriere, pour empêcher les rayons de paſſer outre, où elle ſe réfléchit une ſeconde fois. L'œil ſe rencontrant dans le concours des deux rayons de réflexion, qui ne peuvent être paralleles, il ne faut pas s'étonner ſi on voit l'objet double, ou en deux endroits différens du miroir. Il eſt évident que la diverſe irrégularité du verre, produiſant diverſes réflexions, peut multiplier davantage l'objet, ſurtout lorſqu'il ſera vu un peu de côté.

PROBLEME XIV.

Se repréſenter dans un miroir comme volant.

IL faut placer une grande glace, de ſorte qu'elle faſſe un angle demi-droit avec l'horiſon, ou le plancher d'une chambre. Si on avance vers le miroir ainſi incliné, & qu'on étende les bras en les agitant, comme les oiſeaux font leur ailes, le corps paroîtra horiſontal à la terre, & il ſemblera voler en l'air : mais il faut porter toute ſon attention vers ſa tête, afin de ne point jetter les yeux ſur le pavé, qui eſt auſſi élevé que les pieds.

PROBLEME XV.

Diſpoſer pluſieurs miroirs de maniere qu'on ſe voye dans chacun en même tems.

ON diſpoſera ces miroirs à la circonférence d'un cercle, de telle ſorte qu'ils conviennent avec les cordes de ce cercle. Pour ſe voir dans

chacun de ces miroirs, il faut ſe placer au centre du cercle.

REMARQUE.

C'eſt par le moyen de ce problême qu'on peut faire voir pluſieurs jets d'eau dans une chambre optique, quoiqu'il n'y en ait qu'un.

PROBLEME XVI.

Un mari jaloux étant dans une chambre, lui faire voir ce que fait ſa femme dans une autre chambre, l'un & l'autre étant près de la muraille qui ſépare les deux chambres.

Pl. 23. fig. 9. QUe la figure ABCD repréſente les deux chambres où ſe trouvent le mari & la femme: que EH ſoit la muraille qui ſépare ces deux chambres: que le mari ſoit en G, & la femme en H.

Il faut laiſſer entre la muraille de ſéparation & le plancher une ouverture où l'on puiſſe placer horiſontalement un miroir comme E. Il faut encore en mettre deux autres F & I aux deux murailles AC, BD, de maniere que les rayons qui partiront du point H, ayant frappé quelque point du miroir I, aillent frapper le miroir E; d'où s'étant réfléchis, ils tomberont ſur le miroir F, & de-là ſe réfléchiront en G, où nous avons ſuppoſé que le mari s'étoit poſté: il ſera témoin de toutes les actions de ſa femme. Il eſt vrai que s'il ne veut pas être apperçu, il ne doit point avoir de lumiere, ou bien il doit fermer les volets des fenêtres de la chambre où il eſt, ſi c'eſt pendant le jour qu'il veut ſatisfaire ſa jalouſie. Les glaces dont on ſe

ſert à préſent pour orner les ſallons, ſont très-commodes pour ce ſujet. La lumiere ayant été obligée de ſe détourner à la rencontre des trois miroirs, s'affoiblira quelque peu.

REMARQUE.

On pourroit par ce moyen, étant dans une chambre, voir tout ce qui ſe paſſeroit dans la rue, ſi on mettoit le miroir ſur la tablette de la fenêtre, & qu'on le diſpoſât de maniere que les rayons des objets qui viendroient frapper le miroir, puſſent ſe réfléchir dans la chambre. Mais pour n'être point vu, il faudroit fermer les volets des fenêtres, & ne laiſſer d'eſpace qu'autant qu'il ſeroit néceſſaire pour laiſſer paſſer les rayons des objets qu'on voudroit voir. Si on laiſſoit le miroir dans la même diſpoſition pendant la nuit, & que la chambre fût fort éclairée, on pourroit voir de la rue tout ce qui s'y paſſeroit.

PROBLEME XVII.

Faire paroître dans un miroir un autre objet que celui qui ſemble devoir y être repréſenté.

I.

PLacez une glace de miroir plus élevée que la hauteur d'un homme, en l'inclinant tant ſoit peu à l'horiſon, s'il eſt néceſſaire; mettez quelque objet vis-à-vis de ce miroir, de maniere qu'il ſemble que les rayons de cet objet ayant frappé le miroir, duſſent être renvoyés à l'œil. Au deſſus du premier objet placez un autre objet, qui ſera caché par quelque artifice, dont les rayons pourtant ayant frappé le miroir, ſeront réfléchis

vers les yeux des ſpectateurs. Alors le miroir repréſentera autre choſe que ce qu'il paroît devoir repréſenter. Si on a placé devant le miroir un cercle, il repréſentera un quarré. Ayant mis la ſtatue d'un homme, on verra un lion, ou quelque autre animal; ou bien ayant placé une pendule qui marque une certaine heure, elle paroîtra marquer dans le miroir une heure toute contraire.

II.

On placera une grande glace, qui ira aſſez près du plancher, auquel on fera une ouverture entre des ſolives, avec aſſez d'artifice pour que ceux qui ſont dans la chambre ne s'en apperçoivent point. On mettra quelque image fort éclairée dans la chambre au-deſſus, de maniere qu'elle puiſſe être vue dans le miroir par ceux qui y regarderont. On ſera fort étonné de voir ces objets qui ne paroiſſent point dans la chambre.

Au lieu de mettre l'image dans une chambre au deſſus du miroir, on peut la mettre dans une chambre à côté, en ménageant adroitement une ouverture dans la muraille de ſéparation.

REMARQUE.

C'eſt-là le fondement de ces curioſités d'optique, qui donnent tant d'admiration aux ſpectateurs. Lorſqu'on eſt dans une chambre entierement obſcure, & qu'on regarde vers un côté où ſont placées des glaces, dont on ne s'eſt point apperçu auparavant, à cauſe d'un rideau qui étoit au devant, on voit avec étonnement le ciel repréſenté avec les étoiles, le ſoleil levant, des mers ou des lacs, des vaiſſeaux, des tours, des montagnes, des villes, des

canons, dont on apperçoit la lumiere, lorſqu'ils tirent pour rendre le ſalut aux vaiſſeaux qui paſſent. On y voit enfin tout ce qu'une adreſſe ingénieuſe peut inventer pour donner un plaiſir qui eſt d'autant plus grand, que l'on ne ſçait point d'où viennent tous ces objets : l'eſprit inquiet croit que c'eſt quelque enchantement, quoique ce ſpectacle agréable ne vienne que du lieu qui eſt au-deſſus des ſpectateurs.

PROBLEME XVIII.

Faire une boîte où l'on voye des objets tous différens de ceux que l'on avoit vu en regardant par une autre ouverture, quoique les uns & les autres paroiſſent occuper toute la boîte.

IL faut faire une boîte qui ait pluſieurs côtés, comme celle-ci AEDIHM, qui en a ſix. On ſéparera le dedans de la boîte en pluſieurs cellules par des ais qui iront de chaque angle A, E, D, &c. au centre de la boîte G. Il y aura autant de ſéparations que de côtés, on appliquera à chacun de ces ais des miroirs plats ; on fera à chaque côté de la boîte des ouvertures comme *h* 1, pour regarder dans les ſéparations ; on mettra à ces ouvertures des morceaux de verre, dont la face qui ſera au dedans de la boîte, ne doit point être polie, mais un peu uſée, afin qu'on ne puiſſe pas voir ce qui eſt dans les cellules. On mettra dans ces cellules ou ſéparations les objets qu'on voudra : enfin on couvrira le deſſus de cette boîte d'un parchemin fort mince, pour donner paſſage à la lumiere. Pl. 23, fig. 10.

Quand on regardera par une ouverture, on verra les objets de cette cellule repréſentés dans les miroirs, & l'on croira qu'ils occupent toute la

boîte ; mais en regardant par une autre ouverture on y verra d'autres objets qui paroîtront encore occuper toute la boîte, & ainſi des autres.

REMARQUE.

Pour rendre plus tranſparent le parchemin qu'on met ſur les machines d'optique, il faut le laver pluſieurs fois dans une leſſive claire, que l'on changera à chaque fois : on le lavera pour la derniere fois dans de l'eau de fontaine. Enfin on le mettra ſécher à l'air en le tenant étendu avec des cloux, ou avec des morceaux de bois.

Si on veut donner de la couleur à ce parchemin, on ſe ſervira pour le verd, de verd de gris délayé dans du vinaigre, avec un peu de verd foncé ; pour le rouge, de l'infuſion de bois de breſil ; pour le bleu, du ſuc de jeunes myrthes ; pour le jaune, de l'infuſion faite avec des bayes de nerprun cueillies au mois d'août. On paſſera de tems en tems un vernis ſur le parchemin.

PROBLEME XIX.

Faire une machine d'optique, où il paroîtra une galerie, ou une allée d'arbres, &c, continuée à l'infini.

CEtte boîte au lieu d'être poligone, comme celle qu'on vient de décrire, ſera quarrée ; on lui donnera environ un pied & demi de face, plus ou moins, ſelon qu'on jugera à propos. On appliquera ſur chaque face perpendiculaire intérieure, des glaces : on fera au milieu d'une des faces une ouverture ronde d'environ un pouce de diametre,

mettre, & à cet endroit on ôtera l'étain qui eſt ſur la glace, afin qu'on puiſſe regarder dans la boîte : ſur le fond intérieur, on mettra tels objets qu'on voudra, comme une gallerie, une allée d'arbres, &c. accompagnées de bâtimens ſuperbes, de jardins, de campagnes, de bois & autres ornemens qu'on imaginera : enfin, on couvrira cette boîte d'un parchemin ſemblable à celui dont on a parlé dans le problême précédent. En regardant par l'ouverture du milieu d'une des faces, il ſemblera que les objets mis au fond de la boîte, ſeront continués à l'infini. Si c'eſt une gallerie, par exemple, compoſée de colonnes, on la verra très-longue, & allant toujours en diminuant; ce qui fait un très-bel effet.

REMARQUE.

A l'imitation de ces machines d'optique, on pourroit conſtruire des cabinets revêtus de glaces, dont l'effet rempliroit le ſpectateur d'admiration. On a des glaces aſſez grandes pour faire ces ſortes de cabinets. Ce ſeroit un ouvrage ſuperbe, & qui mériteroit l'attention des curieux. Il faudroit au deſſus de ces glaces laiſſer des ouvertures qu'on fermeroit de quarreaux de verre, pour donner du jour dans ces cabinets.

Après les problêmes qu'on vient de propoſer, il ne ſera point difficile d'imaginer des machines d'optique, qui ſeront compoſées de celles qu'on a décrites, & qui ſeront très-curieuſes, à cauſe des différens objets vus de diverſes manieres, qui ſurprendront lorſqu'on les regardera.

Obſervations diverſes ſur les miroirs plats.

I.

Dans un miroir plat, ce qui eſt à droite paroît à gauche, & ce qui eſt à gauche paroît à droite, & lorſqu'on l'éleve au deſſus de la tête, les pieds & le pavé paroiſſent en haut, tandis que la tête paroît en bas.

II.

Si on ſe regarde la tête dans un miroir depuis le menton juſqu'au front, l'eſpace qui comprend cette grandeur priſe ſur le miroir, n'eſt que la moitié de cette grandeur même, c'eſt-à-dire, de la tête. La même choſe arrivera à l'égard de tous les objets qui ſeront auſſi éloignés du miroir que l'œil en eſt éloigné.

III.

Si on approche un objet d'un miroir dont la glace eſt épaiſſe, on y remarque deux images; l'une eſt bien éclairée, & l'autre eſt repréſentée avec une lumiere plus foible.

IV.

Lorſqu'on approche fort obliquement une bougie allumée, de l'extrêmité d'un miroir, & qu'on met l'œil à peu près auſſi obliquement à l'extrêmité oppoſée, on apperçoit pluſieurs images de la lumiere de la bougie, dont les uns ſont plus foibles que les autres.

V.

Si on diſpoſe à angles droits deux miroirs, & qu'on s'approche de l'un en ſuivant une ligne qui lui ſoit perpendiculaire, il paroîtra que la même

perſonne ſe meut en ſens contraire. Car dans celui qui eſt parallele à la perſonne qui marche, elle paroîtra aller d'un ſens comme du ſeptentrion au midi; mais dans le miroir dont elle s'approche, elle paroîtra aller d'un ſens contraire, c'eſt-à-dire, du midi au ſeptentrion.

VI.

Si deux miroirs ſont un angle obtus un peu plus grand qu'un droit par rapport à celui qui regarde, il ſe verra avec un ſeul œil; mais s'ils ſont un angle aigu un peu plus petit qu'un droit, il ſe verra avec trois yeux, deux nez, deux bouches, &c. l'angle des miroirs étant plus obtus ou moins aigu, on verra d'autres figures groteſques.

VII.

Si on diſpoſe dans un cabinet de jardin pluſieurs miroirs, les uns plus bas & inclinés à l'horiſon, & les autres plus haut, auſſi inclinés à l'horiſon, ceux qui entreront dans ce cabinet, ſe verront d'une figure monſtrueuſe.

VIII.

Les objets repréſentés dans un miroir plat, paroiſſent autant enfoncés derriere le miroir, qu'ils en ſont éloignés par devant. Ainſi pour voir un objet qui eſt dans un petit eſpace, comme s'il étoit fort éloigné, il faut lui faire faire pluſieurs réfléxions ſur des miroirs diſpoſés ſur les faces d'un poligone.

IX.

Quand on préſente quelque écriture à un miroir, elle paroît d'un ſens contraire. S'il y a ARREST, les lettres paroiſſent retournées, &

on lit du même ſens qu'il faut les mettre dans les formes des imprimeries.

PROBLEME XX.

Meſurer une hauteur par réflexion.

I.

Pl. 13, fig. 54. SI la hauteur eſt acceſſible, comme AB, en ſorte qu'on puiſſe approcher de ſon extrêmité B, & connoître de combien on en eſt éloigné, lorſqu'on eſt dans un plan horiſontal, & au niveau de cette baſe B, faites ſur ce plan horiſontal à une diſtance connue du point B, un petit creux C, que vous remplirez d'eau. Vous vous éloignerez de ce petit creux, de maniere que vous puiſſiez voir dans l'eau le ſommet A de la hauteur à meſurer AB, par le rayon de réflexion CE, qui paſſe par l'œil que je ſuppoſe en E. Meſurez exactement la hauteur de l'œil ED, & ſa diſtance CD du point C de réflexion. Nous ſuppoſerons la hauteur ED de 4 pieds, la diſtance CD de 3, & la diſtance BC de 48. Après quoi on dira, par la regle de trois directe, ſi la diſtance CD de 3 pieds donne 4 pieds pour la hauteur ED, combien donnera la diſtance BC de 48 pieds? & l'on trouvera 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche; car en multipliant enſemble les deux derniers termes, 4, 48, & en diviſant leur produit 192, par le premier 3, il vient 64, pour le quatrieme proportionnel.

II.

Mais ſi la hauteur AB eſt inacceſſible, en ſorte qu'on ne puiſſe pas meſurer actuellement la diſtan-

e BC, il faudra dans la même plaine faire en ligne droite ſur CB prolongée, un autre creux à une diſtance connue du premier C, comme F, qu'on remplira pareillement d'eau. La même perſonne s'éloignera encore, de maniere qu'elle puiſſe voir le même ſommet A, par le rayon de réflexion FH, qui paſſe par l'œil que je ſuppoſe en H. J'ai dis la même perſonne, afin que la hauteur de l'œil GH ſoit la même que la premiere DE, que nous avons ſuppoſée de 4 pieds. Comme nous avons ſuppoſé la diſtance CD de 3, ſi l'on ſuppoſe la diſtance CF de 32, & la diſtance FG de 5, en multipliant enſemble les lignes ED, CF, c'eſt-à-dire 4, 32, & en diviſant le produit 128 par l'excès 2 de la diſtance FG ſur la diſtance CD, on aura 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche.

REMARQUE.

Si vous voulez connoître la diſtance BC, ſans ſçavoir la hauteur AB, multipliez enſemble les deux diſtances CD, CF, c'eſt-à-dire 3 & 32, & diviſez leur produit 96 par l'excès 2 de la diſtance FG, ſur la diſtance CD. Le quotient donnera 48 pieds pour la diſtance BC.

Des miroirs cylindriques & ſphériques.

PROBLEME XXI.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion ſur la ſurface convexe d'un miroir ſphérique, étant donnés, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet propoſé.

SI l'œil eſt A, l'objet B, & E le point de réflexion ſur la ſurface convexe DEL d'un miroir Pl. 21; fig 69.

Pl. 23. fig. 69. ſphérique, dont le centre eſt C; tirez de ce centre C, à l'objet B, la droite BC, qui ſera perpendiculaire à la ſurface du miroir ſphérique. C'eſt dans cette lignes BC que ſera l'image de l'objet B, ſçavoir, au point H, qu'on trouvera en prolongeant le rayon de réflexion AE, qui rencontre ici au dedans du miroir la cathete d'incidence BC au point H; car il la peut rencontrer au point D de la ſurface du miroir, & au dehors, ſçavoir, lorſque l'angle d'incidence BEF, ou l'angle de réflexion AEG ſera très-petit; ce qui fait que l'objet B peut être vu au dedans du miroir ſphérique, comme ici, quelquefois en ſa ſurface, & quelquefois au dehors.

SCHOLIE.

La touchante FG, qui paſſe par le point E de réflexion, détermine, comme vous voyez, les angles d'incidence & de réflexion, & coupe la cathete d'incidence BC en I, de telle ſorte que les quatres lignes BC, CD, BI, DI, ſont proportionnelles, & que par conſéquent la ligne BC ſe trouve coupée aux points I, D, dans la moyenne & extrême raiſon proportionnelle, c'eſt à-dire, que le rectangle ſous toute la ligne BC, & ſa partie du milieu DI, eſt égale au rectangle ſous les deux autres parties extrêmes BI, CD, comme on le démontrera aiſément, en tirant par le point B, la ligne BK parallele au rayon de réflexion AE.

Il eſt évident, par la propriété des foyers d'une ellipſe, que les deux points A, B, ſont les foyers d'une ellipſe qui touche le miroir ſphérique au point de réflexion E, & qui a pour grand axe la ſomme des deux rayons AE, BE, de réflexion & d'incidence. Ainſi pour trouver le point de réfle-

xion E, il n'y a qu'à décrire une ellipſe qui touche la circonférence DEL, & dont les foyers ſoient les deux points A, B : ce qui ſe peut aiſément faire par l'interſection de la circonférence DEL, & d'une hyperbole entre ſes aſymptotes, dont l'oppoſée paſſe par le centre C de la même circonférence DEL, comme nous avons démontré dans notre *dictionnaire mathématique*. Pl. 21, fig. 69.

Il eſt évident auſſi, que l'apparence H de l'objet B eſt plus proche du point de réflexion E, que du centre C : car la ligne CH eſt toujours plus grande que la ligne EH, puiſque l'angle CEH eſt toujours plus grand que l'angle ECH, comme on le connoîtra en prolongeant vers L le rayon d'incidence BE, & en lui tirant par le centre C, une parallele MN.

Il eſt encore évident, que la même apparence H de l'objet B, eſt auſſi plus proche du point de réflexion E, ou du point D, de la ſurface du miroir que l'objet B, c'eſt-à-dire, que la ligne EH eſt moindre que le rayon d'incidence BE, & que la ligne DH eſt moindre que la cathete d'incidence BD.

Enfin il eſt évident, que ſi la grandeur OE eſt perpendiculaire à la ſurface du miroir ſphérique DEL, enſorte qu'étant prolongée elle paſſe par ſon centre C, le point P, plus proche du miroir, doit paroître moins enfoncé que le point O, plus éloigné : & que cette grandeur OE doit paroître renverſée & plus petite.

D'où il ſuit qu'une grandeur doit paroître dans un miroir ſphérique convexe toujours plus grande à meſure qu'elle s'approche du miroir parallelement à ſoi-même, parce qu'alors elle paroît moins enfoncée, & par conſéquent plus près de l'œil, &

qu'elle ſe trouve renfermée dans un plus grand angle. Il arrivera la même choſe ſi l'objet demeure immobile, & que l'œil s'approche du miroir, parce qu'alors il verra cet objet moins enfoncé dans le miroir, & par conſéquent plus grand, puiſqu'il le verra de plus proche.

PROBLEME XXII.

Déterminer le lieu de quelque objet vu par réflexion ſur la ſurface d'un miroir cylindrique.

Pl. 20, fig. 67. CE problême eſt aſſez difficile, parce qu'un miroir cylindrique étant pris ſelon ſa longueur, peut être conſidéré comme un miroir plan : étant pris exactement ſelon ſa rondeur, il peut être conſidéré comme un miroir ſphérique : enfin étant pris en tout autre ſens, il participe des propriétés d'un miroir plan & d'un ſphérique.

C'eſt pourquoi ſi l'œil & le point de quelque objet ſont dans un plan qui paſſe par l'axe du miroir cylindrique, ce point ſera vu par réflexion dans le miroir cylindrique, comme dans un miroir plan, je veux dire auſſi enfoncé dans le miroir qu'il en ſera éloigné.

Comme ſi l'on ſuppoſe l'œil B & un point A de quelque objet, dans un plan qui paſſe par l'axe CD du miroir cylindrique EFGH, ce point A ſera vu par le rayon de réflexion BIM, en M, qui eſt le point où ſe rencontrent ce rayon de réflexion & la ligne ALM, perpendiculaire à la commune ſection EH du miroir & du plan qui paſſe par l'œil & par le point de l'objet A. Dans ce cas, il eſt évident que l'objet A paroît auſſi enfoncé dans le miroir, qu'il en eſt éloigné, c'eſt-à-dire, que les

lignes AL, LM, ſont égales entre-elles, à cauſe des deux triangles rectangles égaux AIL, MLI.

Mais ſi l'œil & le point de l'objet ſont dans un plan parallele à la baſe du miroir cylindrique, comme la ſection de ce plan & du miroir eſt un cercle, l'objet paroîtra dans ce miroir cylindrique, comme nous avons vu qu'il devoit paroître dans un miroir ſphérique *. D'où il ſuit que les grandeurs paralleles à la baſe d'un miroir cylindrique y paroiſſent fort raccourcies, & que celles qui ſont paralleles à l'axe du même miroir, y paroiſſent preſque de la même grandeur, comme dans un miroir plan. Cela eſt encore vrai dans un miroir conique, comme il eſt aiſé de le démontrer.

* Prob. précéd.

PROBLEME XXIII.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion ſur la ſurface concave d'un miroir ſphérique, étant donnés, déterminer l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet propoſé.

SI l'œil eſt A, l'objet B, & E le point de réflexion ſur la ſurface concave FEG d'un miroir ſphérique, dont le centre eſt C, tirez de ce centre C, à l'objet B, la droite BC, qui étant prolongée, rencontre ici le rayon de réflexion AE, auſſi prolongé, au point H, qui ſera l'image ou la repréſentation de l'objet propoſé B, parce que ce point H eſt le contour du rayon de réflexion AE, & de la cathete d'incidence CD tirée du centre C par l'objet B.

Pl. 22, fig. 72.

REMARQUE.

Si l'objet avoit été plus près du miroir, comme

Pl. 22. fig. 71. en K, ſon apparence I ſe ſeroit trouvée de l'autre côté, ſçavoir, au concours du rayon de réflexion AE, & de la cathete d'incidence CI, tirée du centre C par l'objet K. Si l'objet étoit en L, on ne le verroit point du tout, parce que dans ce cas la cathete d'incidence FG, tirée du centre C par l'objet L, ne rencontreroit point le rayon de réflexion AE, ces deux lignes étant paralleles. Enfin ſi l'objet étoit en M, ſon apparence N ſe trouveroit en dehors, ſçavoir, au concours du rayon de réfléxion AE, & de la cathete d'incidence CN, tirée du centre C par l'objet M.

Par-là on voit la raiſon de ce que l'expérience nous fait connoître, ſçavoir, qu'un objet peut être vu par réflexion dans un miroir concave, comme dans un convexe, hors de la ſurface du miroir, comme eſt ici le point N, qui eſt l'image de l'objet M, & en dedans, comme H, qui eſt l'image de l'objet B, ou I qui eſt l'image de l'objet K. Ces deux images H, I paroiſſent enfoncées dans le miroir, mais jamais tant que dans un miroir plan. Cela vient des différens concours des rayons de réflexion, & des cathetes d'incidence, qui peuvent faire voir les objets quelquefois en la ſurface du miroir, quelquefois en dedans, & d'autres fois en dehors & par devant, plus ou moins loin du miroir; de ſorte qu'on les voit tantôt entre l'objet & le miroir, tantôt au lieu même où eſt l'objet; ce qui fait que l'on peut manier l'image de ſa main ou de ſa face hors du miroir: tantôt plus loin du miroir que l'objet n'en eſt éloigné, & tantôt au lieu même où l'œil eſt placé. D'où il arrive que ceux qui en ignore la raiſon, ont peur, & ſe retirent quand ils voyent ſortir du miroir l'image d'un épée ou d'une dague, que quelqu'un tient derriere eux.

Il eſt évident que la touchante OP, qui paſſe par le point E de réflexion, determine l'angle d'incidence BEP, & ſon égal, ou l'angle de réflexion AEO; & que la ligne CE, qui eſt perpendiculaire à la touchante OP, diviſe en deux également l'angle AEB, fait par les rayons d'incidence & de réflexion. D'où il ſuit que ſi l'on diviſe en deux également cet angle par une ligne droite, cette ligne droite paſſera par le centre C du miroir ſphérique, parce qu'elle ſera perpendiculaire à la touchante OP.

Il eſt aiſé de juger que l'objet B peut être vu par réflexion en deux endroits différens, lorſque l'œil eſt placé en un certain point: car ſi on mene un rayon d'incidence quelconque BE, avec ſon rayon de réflexion AE, & un autre rayon d'incidence BQ, avec ſon rayon de réflexion QR, il rencontrera le premier en un point, comme A, où l'œil étant mis, il verra l'objet B par les deux rayons de réflexion AE, AQ, & par conſéquent en deux endroits différens, ſçavoir, aux points H, R, au dedans & au dehors du miroir.

Il eſt auſſi facile de juger que ſi l'objet eſt placé au centre C du miroir, ſon image ſe réfléchit contre lui-même: car dans ce cas l'angle d'incidence eſt droit. C'eſt pourquoi celui qui aura l'œil au centre C du miroir, ne pourra voir autre choſe que lui-même.

PROBLEME XXIV.

Des miroirs ardens.

NOus avons vu dans le problême précédent, que deux rayons de réflexions, qui appartien-

[r] Voyez le probl. XIII de phyſiq.

Pl. 22, fig. 71. nent à un même objet, comme AE, AQ, qui appartiennent à l'objet B, s'uniſſent & ſe rencontrent au point A, au devant du miroir; ce qui n'arrive point aux miroirs plans, où les rayons de réflexion s'écartent, & encore moins aux miroirs convexes, où les rayons de réflexion s'écartant encore davantage, s'uniſſent au-delà du miroir. D'où il ſuit que par leur moyen on ne peut pas produire du feu, comme l'on fait avec un miroir concave, qu'on appelle pour cela *miroir ardent*, & qui peut être parabolique ou ſphérique.

Il eſt facile de faire des miroirs ſphériques, parce que le tour peut aiſément ſervir à en faire des modeles, & qu'on peut aiſément les polir: mais le tour ne peut pas être mis ſi facilement en uſage, pour faire des modeles qui puiſſent ſervir à conſtruire des miroirs paraboliques; ce qui fait qu'ils ſont très-rares, & qu'ils ne ſont pas ſi bons que les ſphériques, quoique ſelon la théorie, ils duſſent être meilleurs. C'eſt pourquoi nous parlerons ſeulement ici des miroirs ſphériques.

Pl. 24, fig. 72. Soit donc ABC la ſurface concave d'un miroir ſphérique bien poli, dont le centre ſoit D, & un demi-diametre BD. Soit EF un rayon de lumiere parallele au demi-diametre BD, qui ſe réfléchiſſant par le rayon de réflexion FG, coupera le demi-diametre BD, en un point, comme G, plus proche de la ſurface du miroir ſphérique, que de ſon centre, c'eſt à-dire, que la ligne BG ſera toujours plus petite que la ligne DG, comme on le connoîtra en tirant le demi-diametre DF, & menant GK perpendiculaire au milieu de DF: le triangle FGD ſera iſoſcelle: les lignes DG, GF, ſeront plus grandes que DF, égal à BD. Ayant donc ôté DG de part & d'autre, il reſtera

GF, égal à DG, plus grand que GB. Pl. 23, fig. 72.

Il eſt aiſé de juger que ſi de l'autre coté il y a un rayon de lumiere H1, parallele au même demi-diametre BD, & auſſi éloigné de ce demi diametre BD, que le rayon EF, en ſorte que les arcs BF, BI, ſoient égaux, ce rayon HI ſe réfléchira par le rayon IG, qui paſſera par le même point G. Si ce rayon de lumiere étoit plus ou moins éloigné du demi-diametre BD, ſon rayon de réflexion ne couperoit pas ce demi-diametre BD au même point G; mais en quelque lieu qu'il le coupe, ce point de rencontre ſera toujours plus éloigné du centre que de la ſurface du miroir. Or, comme on peut conçevoir une infinité de rayons différens paralleles entre eux, & au demi-diametre BD, & également éloignés du même demi-diametre BD, il eſt évident que tous ces rayons doivent ſe réfléchir en un même point, comme G, qu'on appelle foyer. C'eſt dans ce point qu'on peut aux rayons du ſoleil allumer une bougie, ou un flambeau, fondre en peu de tems quelque métal que ce ſoit, & vitrifier la pierre, quand le miroir eſt un peu grand.

On peut aiſément connoître par la trigonométrie la diſtance de ce foyer G à la ſurface du miroir, la diſtance du rayon d'incidence ou de lumiere étant connue en degrés, & le demi-diametre du miroir étant connu en pieds ou en pouces. Comme ſi le rayon d'incidence EF eſt éloigné du demi-diametre BD, par exemple, de 5 degrés, en ſorte que l'arc BF, ou l'angle BDF ſoit de 5 degrés; & ſi l'on ſuppoſe le demi-diametre DB, ou DF de 100000 parties, on trouvera en ces mêmes parties la diſtance DG, en tirant du foyer G la ligne GK perpendiculaire au demi-diametre DF,

Pl. 24. fig. 72. qui ſera diviſé en deux également au point K; ce qui fait que ſa moitié DK ſera de 50000 parties, & en faiſant dans le triangle DKG cette analogie,

Comme le ſinus total	100000
A la ſécante de l'angle D	100382
Ainſi la ligne DK	50000
A la ligne DG	50191

ce nombre 50191 étant ôté du demi-diametre BD, ou de 100000, il reſtera 49809 pour la ligne GB, ou pour la diſtance du foyer à la ſurface concave du miroir.

C'eſt de cette maniere que nous avons ſupputé la table ſuivante, où l'on voit que le foyer G s'approche toujours de la ſurface concave d'un miroir ſphérique, à meſure que les rayons d'incidence s'éloignent du centre du miroir; de ſorte que quand ils en ſont éloignés de 60 degrés, le foyer

1	49992	16	47985	31	41668	46	28022
2	49970	17	47715	32	41041	47	26686
3	49932	18	47427	33	40382	48	25276
4	49878	19	47269	34	39689	49	23787
5	49809	20	46791	35	38961	50	22214
6	49725	21	46443	36	38197	51	20549
7	49625	22	46073	37	37393	52	18787
8	49509	23	45682	38	36549	53	16918
9	49377	24	45268	39	35662	54	14935
10	49229	25	44831	40	34730	55	12828
11	49064	26	44370	41	33749	56	10586
12	48883	27	43884	42	32798	57	8196
13	48685	28	43372	43	31634	58	5646
14	48468	29	42832	44	30492	59	2920
15	48236	30	42265	45	29289	60	0000

G ſe trouve préciſément au point B de la ſurface concave du miroir.

On voit auſſi dans cette table, que les rayons d'incidence, depuis un degré juſqu'environ à 15 degrés de diſtance, s'uniſſent par réfléxion preſque en un même point, parce que la diſtance du foyer G ne décroît pas ſenſiblement. Ce qui fait qu'une telle quantité de rayons envoyés du ſoleil ſur la ſurface concave d'un miroir ſphérique, qui peuvent paſſer pour paralleles, à cauſe de la grande diſtance du ſoleil à la terre, ſe réfléchit preſque en un même point. Par conſéquent tous les rayons de réflexion qui ſe trouvent compris dans une portion concave de ſphere d'environ 30 degrés, peuvent par leur union produire du feu, comme l'expérience le montre.

On voit encore dans la table précédente, que le foyer G eſt éloigné de la ſurface concave du miroir d'environ la quatrieme partie du diametre, ou de la moitié du demi-diametre BD, & que par conſéquent un miroir concave ſphérique doit brûler d'autant plus loin, que ſon diametre ſera plus grand. il ne faut pourtant pas croire qu'il puiſſe brûler à une diſtance énorme; car outre la difficulté qu'il y auroit à faire un miroir aſſez grand, pour produire cet effet; les rayons de réflexion qui s'uniſſent en un trés-petit eſpace vers G dans un petit miroir, ne s'uniroient pas ſi parfaitement dans un grand miroir, ce qui diminueroit conſidérablement la force des rayons. Ainſi il n'eſt pas croyable qu'Archimede ſe ſoit ſervi d'un miroir concave pour brûler la flote des Romains à une diſtance de 375 pas géometriques, qui reviennent à 1875 pieds.

COROLLAIRE.

Pl. 24, fig 72. Il ſuit de ce qui a été dit dans ce problême & dans le précédent, que ſi l'on met un corps lumineux, comme une chandelle, au foyer, G ſes rayons ſe réfléchiront par des lignes paralleles entre elles & au demi-diametre BD : & que ſi on la met au centre D, ſes rayons ſe réfléchiront contre eux-mêmes, parce qu'alors ils ſeront perpendiculaires à la ſurface du miroir.

On peut par le moyen d'un ſemblable miroir, repréſenter tels caracteres qu'on voudra ſur une muraille obſcure, pourvu que le miroir n'en ſoit pas fort éloigné. On écrira ſur la ſurface concave du miroir avec de la cire ou autre matiere, des lettres renverſées, & d'un caractere un peu gros, & on expoſera le miroir au ſoleil, de maniere que les rayons renvoyés vers la muraille, y faſſent paroître les lettres, qui ſe trouveront dans leur ſituation ordinaire.

On peut auſſi, par le moyen du même miroir, augmenter la lumiere dans une grande chambre, en appliquant une bougie allumée au foyer de ce miroir ; car les rayons de cette bougie ſe réfléchiront par toute la chambre, & feront une telle clarté, qu'on pourra aiſément lire de loin ſur les murailles.

Enfin on peut ſe ſervir de la même façon de ce miroir pour s'éclairer la nuit, & voir de bien loin ce qui ſe paſſe : il peut être utile à ceux qui veulent conſerver leur vue, en ſe ſervant de la lumiere d'une lampe miſe au foyer du miroir, qui doit être placé un peu haut, & à côté, afin qu'il puiſſe envoyer commodément la lumiere de la lampe ſur la table ou l'on veut lire, ou écrire.

Remarques

Remarques ſur les miroirs concaves.

I.

Les miroirs ardens ſe font ordinairement de métal; la réflexion s'y fait plus facilement, & l'effet en eſt plus prompt & plus vigoureux. On peut auſſi les faire de verre, la réflexion s'y fera preſque auſſi bien, pourvu que le verre ſoit bien net & un peu mince, que l'enduit en ſoit bon, pour empêcher les rayons d'incidence de traverſer & de ſe briſer.

II.

Pour trouver facilement le foyer d'un miroir concave, quand il eſt expoſé aux rayons du ſoleil, il faut éloigner ou approcher du miroir une petite piece de bois, ou de quelqu'autre matiere ſolide, en telle ſorte que le diſque de lumiere qui paroîtra par réflexion contre cette piece, paroiſſe le plus petit qu'il ſera poſſible; car alors la piece ſe trouvera au foyer. Ou bien on mettra de l'eau chaude auprès du miroir du côté de la concavité qui regarde directement le ſoleil: la fumée qui ſortira de cette eau chaude, fera voir avec plaiſir le cone de réflexion, dont la pointe ſera le foyer. Ou bien encore on jettera de la pouſſiere au-devant de la concavité du miroir qui regarde directement le ſoleil; on connoîtra dans cette pouſſiere, comme dans la fumée, le cone de lumiere réfléchie, & par conſéquent ſa pointe, qui ſera le foyer qu'on cherche. On peut même en hyver remarquer ce foyer & tout le cone de réflexion ſans pouſſiere & ſans fumée, lorſque l'air ſera groſſier & condenſé par le froid.

III.

Quoiqu'il ſemble que pour produire du feu par le moyen d'un miroir concave, il doive être éclairé des rayons du ſoleil, afin que la réflexion s'y puiſſe faire, on peut néanmoins en produire dans un lieu obſcur, en renvoyant les rayons du ſoleil contre la concavité de ce miroir par le moyen d'un miroir plan, qui doit être un peu grand, afin qu'un plus grand nombre de rayons s'uniſſant au foyer, puiſſe brûler avec plus de force.

IV.

Wolfius remarque dans ſa catoptrique, que Kirker étant à Siracuſe, avoit obſervé que la diſtance à laquelle les vaiſſeaux des Romains auroient dû être brûlés, n'étoit que de trente pas. Quoique cette diſtance ſoit bien moindre que celle qu'on a rapporté ſur la fin du problême XXIV, elle eſt cependant encore aſſez conſidérable pour faire douter de la vérité du fait; puiſqu'Archimede auroit dû ſe ſervir d'une portion de ſphere dont le diametre auroit eu plus de 120 pieds. Une telle portion de ſphere auroit fort approché de la figure plate, & par conſéquent elle n'auroit pu faire un grand effet. On dit encore que Proclus, par le même artifice qu'Archimede, brûla la flote de Vitalien qui aſſiégeoit Biſance; mais la vérité de ces faits eſt fort incertaine, pour la raiſon qu'on vient de dire.

V.

Il vaut mieux s'en tenir à ce que dit le même Wolfius de quelques miroirs qui ſont très-remarquables. Manfrede Septala, chanoine de Milan,

avoit un miroir parabolique, dont le foyer étoit à 15 ou 16 pas, où il brûloit des morceaux de bois. Vilette, ouvrier de Lyon, avoit fait trois miroirs, dont les effets rapportés par Wolfius, ſont très-dignes de remarque; leur foyer étoit aſſez large, & n'étoit éloigné que de trois pieds. L'un de ces miroirs fut préſenté au roi de Perſe par Tavernier, connu par ſes voyages: l'autre fut acheté par le roi de Dannemark, & le troiſieme fut donné au roi de France. M. Tſchirnaus en avoit fait un qui l'emportoit ſur tous ceux-là: il étoit compoſé d'une lame de cuivre, qui n'étoit gueres plus épaiſſe que deux fois le dos d'une lame de couteau ordinaire: la largeur du miroir étoit d'environ trois aulnes de Lipſick, & ſon foyer n'avoit que deux de ces aulnes de diſtance. Voici quelque-uns de ſes effets.

1°. Il mettoit le feu en un moment à un morceau de bois mis à ſon foyer; la flamme expoſée au plus grand vent, ne s'éteignoit point. 2°. Il faiſoit bouillir l'eau avec tant de violence, que les œufs qu'on y mettoit étoient bien-tôt cuits, & ſi on laiſſoit l'eau un peu de tems, elle s'évaporoit entiérement. 3°. Un morceau d'étain ou de plomb préſenté au foyer ſe fondoit goutte à goutte, & étoit percé en deux ou trois minutes. 4°. Des lames de fer, d'acier, de cuivre, d'argent, &c. devenoient rouges ſur le champ, & étoient percées en moins de ſix minutes. 5°. Les pierres, les briques, & les autres matieres qui ne ſe liquéfient point, devenoient rouges comme un fer ardent. 6°. L'ardoiſe, les tuiles, les morceaux de pots caſſés, qui avoient ſouffert un feu violent, les pierres de ponce, les morceaux de creuſet, les os, les motes de terre ſe changeoient en verre.

VI.

A l'imitation du miroir de M. Tſchirnaus, un artiſan de Dreſde en fit quelques-uns de bois, qui produiſoient des effets preſque auſſi ſurprenans. Trabere rapporte qu'on peut faire des miroirs ardens avec des morceaux d'or, * ou de verre. On les diſpoſe dans une jatte de bois, creuſée en forme de miroir ſphérique; on les y attache avec de la poix mêlée de cire, dont on a enduit également le dedans de la jatte. Zahn rapporte auſſi qu'un ingénieur nommé Neuman, fit * à Vienne en Autriche, un miroir concave, qui étoit compoſé de carton fort & de paille collés enſemble. Ce miroir avoit aſſez de force pour faire fondre toutes ſortes de métaux.

* Auro ſtrepero

* En 1699.

VII.

Il y a du plaiſir à regarder dans les miroirs concaves, ſur-tout lorſque ce ſont des portions de grande ſphere. Si on en approche d'aſſez près, on ſe voit une face fort large, un nez extrêmement long, de grands yeux, les cheveux & la barbe d'une groſſeur conſidérable; le poil folet y paroît comme une groſſe barbe: enfin on remarque ſur le viſage les moindres tâches & des monticules ſur la peau qui paroît ſans miroir la plus unie. Si on s'éloigne du miroir à une certaine diſtance, on s'y voit renverſé. Si on ſe met à une autre diſtance, & qu'on avance la main ou une épée nue, on apperçoit l'image de la main ou celle de l'épée entre ſoi & le miroir: il ſemble qu'on ſe touche les doigts, & que l'épée même avance vers l'œil, quand on la porte vers le miroir. Un flambeau, préſenté derriere la perſonne qui regarde le miroir,

paroîtra lui venir brûler le viſage. Peut-être y auroit-il quelque plaiſir à voir les figures d'un ſinge, à qui on préſenteroit un miroir concave, & qui verroit ſa patte & ſon image au dehors.

VIII.

Quand on place l'œil au centre du miroir concave, on ne voit qu'un grand œil repréſenté près de la ſurface du miroir. Si le miroir dont on ſe ſert eſt une portion d'une petite ſphere, on s'y voit d'une figure monſtrueuſe, avec deux nez, trois yeux, deux bouches, quelquefois avec des yeux qui n'ont qu'une ſeule paupiere, entre deux nez. On peut examiner ce qui arriveroit, ſi on enchâſſoit un miroir concave entre deux miroirs plats, &c.

IX.

Si le verre du miroir eſt teint de quelque couleur, il la communique à celui qui ſe regarde; en ſorte qu'on ſe voit pâle, cendré, livide, &c. ſuivant les couleurs qu'on a donnéà la glace du miroir. Voyez les remarq. du prob. XLII.

X.

Il ſeroit difficile de rapporter toutes les différentes ſituations où l'on peut placer le miroir, pour y repréſenter des figures ſurprenantes. Je me contenterai de rapporter celle-ci, qui eſt de placer un miroir fait d'une portion de grande ſphere au haut du plancher : on s'y verra comme pendu en l'air hors du miroir; la tête paroîtra en haut & les pieds en bas, dans la même ſituation qu'un pendu.

PROBLEME XXV.

Conſtruire une chambre optique, où l'on voit les objets plus grands que la boîte.

Pl. 23, fig. 11. FAites une boîte quarrée ABCDEFG, convenable pour le miroir concave, dont vous voulez vous ſervir : il faut que le centre du miroir tombe hors de la boîte, c'eſt-à-dire, qu'il faut que la largeur AD de la boîte ſoit plus petite que le rayon de la ſphere dont le miroir eſt une portion. Couvrez le deſſus de la boîte d'un parchemin tranſparent, comme celui qu'on a décrit au problême XVIII, ou d'un verre bruni & non poli.* Appliquez à la face intérieure ABG un miroir concave ; on doit préférer une portion de grande ſphere : placez à la face intérieure oppoſée DEFC, quelque image peinte, comme celle d'un homme, d'un bâtiment, &c. ménagez au haut de cette même face en IH une ouverture en long, que vous garnirez d'un verre poli. Lorſqu'on regardera par cette ouverture, on verra la peinture beaucoup plus grande que la boîte.

PROBLEME XXVI.

Faire le moule d'un miroir concave ſphérique.

1°. AYant pris de la boue déſſechée, & l'ayant réduite en poudre, paſſez-la au tamis pour en ôter le gravier & les autres ordures.

2°. Détrempez cette poudre tamiſée dans de

* On brunira ce verre, en le frottant ſur une ſurface plane avec du menu ſable broyé.

l'eau, & étant réduite en bouillie, paſſez-la par un bluteau, ou tamis.

3°. Prenez de la fiente de cheval & de la bourre; mêlez-la avec cette maſſe juſqu'à ce que ce compoſé ne faſſe plus qu'un corps d'une certaine conſiſtance. On y peut joindre du pouſſier ou de la brique bien pilée & paſſée au crible.

4°. Avec de la pierre que l'on trouve dans les ſablonieres, faites deux moules groſſierement ébauchés, dont l'un ſera convexe & l'autre concave; puis frottez l'un dans l'autre, juſqu'à ce qu'ils s'emboîtent bien enſemble; & pour y réuſſir plus aiſément, vous aurez ſoin de mettre entre ces deux moules, du ſable mouillé, qu'il eſt bon d'avoir paſſé auparavant au crible, afin qu'il n'y reſte point de gravier, ni de petites pierres, qui pourroient gâter la ſurface des moules.

5°. Servez-vous d'un rouleau de bois pour étendre ſur une table ce lut ou cette maſſe ci-devant préparée, juſqu'à ce qu'elle ait l'épaiſſeur que vous voulez donner au miroir ſphérique. Ce lut étant ainſi étendu, vous le ſoupoudrerez de poudre de briques pilées, afin qu'il ne s'attache point au moule convexe, dont vous lui ferez prendre la figure, en le mettant dans ce moule.

6°. Après qu'il ſera ſec, vous le frotterez de quelque graiſſe, & le remplirez d'un couvercle fait de la même matiere, c'eſt-à dire, du même lut.

7°. Ce couvercle étant ſec, vous ôterez le lut qui a la figure du miroir, & qui occupe la place qui eſt entre le moule de pierre & le couvercle, puis vous frotterez le dedans du moule de pierre d'une compoſition faite avec de la craie & du ſuif, & vous mettrez le couvercle deſſus.

8°. Mais pour empêcher que ce couvercle ne

tombe au fond du moule de pierre, vous y ferez un rebord, qui s'appuiera ſur le bord du moule de pierre, de maniere qu'étant poſé dans le moule de pierre il y occupe la même place qu'il occupoit lorſque le moule du miroir y étoit.

9°. Enfin vous garnirez de fil de fer le dehors du moule de pierre, & vous ménagerez au rebord deux trous, afin que quand on verſera la matiere du métal par l'un, l'air enfermé entre ces moules, puiſſe ſortir par l'autre.

PROBLEME XXVII.

Faire la compoſition que l'on emploie aux miroirs de métal.

PRenez huit parties d'un cuivre qui n'ait point encore ſervi, deux parties d'étain d'Angleterre, & cinq parties de marcaſſite; faites les fondre enſemble: puis vous prendrez au bout d'un fer chaud un peu de cette matiere fondue: ſi étant refroidie elle eſt trop rouge, vous y mettrez un peu d'étain; mais ſi elle eſt trop blanche, vous y ajouterez un peu de cuivre, juſqu'à ce que la couleur ſoit convenable; enfin vous verſerez cette matiere fondue dans le moule préparé au problème précédent.

REMARQUE.

On peut encore faire une autre compoſition avec dix parties de cuivre, quatre parties d'étain d'Angleterre, quelque peu d'antimoine & de ſel ammoniac; on remue cette matiere fondue avec une baguette ou ſpatule, juſqu'à ce qu'il en ſorte une vapeur, qu'il faut bien prendre garde de reſpirer, parce que c'eſt un poiſon.

PROBLEME XXVIII.

Polir les miroirs de métal.

VOus ajuſterez avec de la poix noire une molette ou poignée de bois au miroir de métal, & vous le frotterez ſur le moule rond de pierre, dont on a parlé au problême XXVI, en y mettant d'abord du ſable ou grès broyé & mouillé. Quand le miroir ſera bien frotté, vous n'emploierez plus de grès; cependant vous frotterez juſqu'à ce que vous le voyiez propre à être poli. Alors vous laiſſerez ſécher le moule rond de pierre, & quand il ſera ſec, vous l'envelopperez d'un papier blanc, ſur lequel vous mettrez du tripoli & de la potée d'étain : vous frotterez le miroir juſqu'à ce qu'il ſoit bien poli.

REMARQUE.

On polit de la même maniere les miroirs de verre; mais il faut les frotter dans le moule creux.

Du ſable ou grès.

Le ſable ou grès dont on a parlé dans les problêmes précédens, & dont on ſe ſert principalement pour travailler le verre & le polir, eſt fait avec des morceaux de meules à aiguiſer. On les broie pour les réduire en poudre : on doit avoir trois ou quatre ſortes de cette poudre, qui auront chacune leur degré de force, pour les employer ſelon la qualité de l'ouvrage qu'on veut faire. On les ſépare fort commodément de cette ſorte : on met tout le gros broyé dans un grand vaiſſeau plein d'eau, que l'on remue beaucoup

pendant quelque tems : on le laiſſe un peu repoſer ; pendant ce tems tout le plus gros va au fond. Alors inclinant promptement ce vaiſſeau, on verſe toute l'eau encore trouble dans un autre : on laiſſe auſſi repoſer cette ſeconde eau un peu de tems, puis on verſe cette eau dans un troiſieme vaiſſeau, & ainſi de ſuite : de cette maniere on a le grès qui ſe trouve au fond des vaiſſeaux dont on a verſé l'eau, & ces différens grès ont des degrés de force différens, ſuivant le nombre des vaiſſeaux où l'on a reçu ces eaux troubles, qu'on a laiſſé repoſer. On conſerve ces diverſes ſortes de grès dans des vaiſſeaux ſéparés.

Du tripoli.

Le tripoli eſt une pierre ou eſpece de terre ; le meilleur eſt celui qui vient d'Allemagne, & celui qu'on tire d'une montagne près de Rennes en Bretagne : mais le tripoli qu'on apporte d'Auvergne n'eſt pas ſi eſtimé : de quelque endroit qu'il vienne, il faut choiſir le plus léger. On peut employer le tripoli tel qu'on le tire de la terre ſans autre préparation, lorſqu'il a de bonnes qualités.

La ſeconde maniere de préparer le tripoli, eſt de le broyer en le détrempant avec de l'eau-de-vie, ou à ſon défaut avec du vin blanc, & d'en mettre une certaine quantité dans un vaiſſeau de verre bien bouché. Quand ce tripoli aura reſté quatre ou cinq mois dans ce vaiſſeau, il ſera fort adouci : on en prendra ce qu'on jugera à propos pour en faire de petites maſſes, qu'on laiſſera ſécher à l'ombre. On s'en ſert à ſec, quoiqu'on puiſſe auſſi l'employer tel qu'on le retire du vaiſſeau où il aura été gardé.

La troiſieme maniere de préparer le tripoli ſert à l'adoucir extrêmement, & à augmenter ſa qualité déterſive. On emplit de tripoli deux creuſets, que l'on met l'un ſur l'autre, on les lute bien, tant à leur jointure que tout à l'entour ; enſuite on laiſſe ſécher le lut à l'ombre, afin qu'il ne ſe fende point. On met ces creuſets dans un four de boulanger, où les ayant enterré dans la braiſe, on les laiſſe au moins pendant deux jours. C'eſt un excellent tripoli, qui peut être employé ſec ou détrempé.

De la potée d'étain.

Il y a deux ſortes de potée d'étain, l'une qui eſt blanche & l'autre qui eſt griſe. Celle-ci ſe fait avec des ratures d'étain qu'on jette dans l'eau forte, où elle ſe précipite, & ſe réſout en une pouſſiere griſâtre & très-ſubtile, mais cependant plus groſſiere que la blanche.

La potée blanche ſe fait de cette maniere. On met de l'étain fin d'Angleterre dans un pot de terre qui puiſſe réſiſter au feu : on couvre ce pot, & on le lutte avec de la terre de potier bien corroyée & mêlée avec de la bourre. On laiſſe ſécher ce lut, puis on met le pot dans un four de potier de terre, avec les autres vaiſſeaux ; on l'y laiſſe juſqu'à ce qu'il ſoit refroidi de lui-même. Cela étant fait, on trouve dans le pot une potée très-blanche, qui n'eſt que l'étain parfaitement calciné. Voyez la dioptrique oculaire du pere Cherubin d'Orleans, pag. 353, 354.

Des ſpheres de verre, propres à produire du feu aux rayons du ſoleil.

ON peut encore produire du feu aux rayons du ſoleil avec une ſphere de verre de criſtal, ou de quelque autre matiere qui puiſſe facilement être pénétrée par la lumiere, comme avec de l'eau renfermée dans une bouteille bien ronde, ou avec une ſphere de glace. Ce feu n'eſt pas produit par réflexion, mais par réfraction, qui peut auſſi aſſembler en un point pluſieurs rayons de lumiere paralleles entre eux. Ces rayons entrant dans la ſphere, ſe briſent en s'approchant de la perpendiculaire, & en ſortant de la ſphere ils ſe briſent de nouveau en s'ecartant de la perpendiculaire. Ce qui les fait approcher du diametre de la ſphere qu'ils rencontrent en dehors dans un point qui eſt le foyer: mais l'effet n'eſt pas ſi prompt, ni ſi vigoureux que dans un miroir ardent.

PROBLEME XXIX.

Trouver le foyer d'une ſphere ou boule de verre.

Pl. 24, fig. 73. SOit BCD une ſphere ou boule de verre, dont le centre ſoit F, & CD un diametre. Soit un rayon de lumiere ou d'incidence AB, qui rencontrant la ſurface de la boule de verre en B, la pénetre, & entre dedans: mais au lieu de continuer ſelon la ligne droite ABH, comme il arriveroit, s'il ne rencontroit aucune réſiſtance, il ſe briſe en ce point B, lequel à cauſe de cela eſt appellé point de réfraction, & en s'approchant de la perpendiculaire GBF vers le centre F, il

continue ſelon la ligne BI. Cette ligne BI étant prolongée, rencontre le diametre CD, auſſi prolongé au point E, qui ſeroit le foyer, ſi le rayon briſé BI ne ſe briſoit de nouveau au point I, par la ligne IO, qui, en s'écartant de ſa perpendiculaire IL, va rencontrer le diametre CD au point O, qui eſt le foyer. Pl. 24. fig. 73.

Avant que d'enſeigner à trouver ce foyer O, ou ſa diſtance DO à la ſurface de la boule de verre, nous expliquerons ici quelques termes & quelques propriétés des angles briſés & des angles de réfraction dans le verre, qui ne ſont pas les mêmes dans les autres corps diaphanes, comme l'expérience le fait connoître.

Si la ligne AB eſt un *rayon d'incidence*, la droite BI s'appelle *rayon de réfraction*, & l'angle HBI ſe nomme *angle de réfraction*. La droite BG, qui eſt perpendiculaire à la ſurface de la boule, s'appelle *axe d'incidence*. La ligne BF, qui paſſe par le centre, & qui n'eſt que la ligne BG prolongée, ſe nomme *axe de réfraction*.

Le plan qu'on imagine par le rayon d'incidence AB, & par le rayon de réfraction BI, s'appelle *plan de réfraction* : il eſt toujours perpendiculaire à la ſurface de la boule qu'on nomme *ſurface rompante*, parce que le rayon d'incidence ſe briſe au point où il rencontre cette ſurface. Il eſt évident que le plan de réfraction paſſe par les axes d'incidence & de réfraction, & qu'il contient l'angle de réfraction, HBI, l'angle IBF, qu'on appelle *angle briſé*, & l'angle ABG, qui ſe nomme *angle d'inclinaiſon*, lequel eſt toujours égal au complément de l'angle d'incidence ABP.

L'angle briſé croît ou décroît à meſure que l'angle d'inclinaiſon eſt plus grand ou plus petit ;

Pl. 24, fig. 73. de ſorte que quand l'un de ces deux angles eſt nul, l'autre angle eſt auſſi nul. Comme ſi la perpendiculaire BG eſt un rayon d'incidence, l'angle d'inclinaiſon ſera nul; ce rayon d'incidence GB en pénétrant le verre, ne ſe briſera point, mais continuera en ligne droite vers le centre F, ce qui fait que l'angle briſé eſt auſſi nul. Ainſi vous voyez que lorſque le rayon d'incidence eſt perpendiculaire à la ſurface rompante, il ne ſe fait aucune réfraction, parce qu'il n'y a aucune raiſon pour laquelle cette réfraction ſe doive faire plutôt d'un côté que d'un autre.

Quoique l'angle briſé croiſſe à meſure que l'angle d'inclinaiſon augmente, néanmoins il ne croît pas de la même façon, c'eſt-à-dire, que ſi l'angle d'inclinaiſon augmente par exemple d'un degré, l'angle briſé n'augmentera pas auſſi d'un degré. Mais cette augmentation eſt telle, que les ſinus des angles d'inclinaiſon dans un même milieu ſont proportionnels aux ſinus de leurs angles briſés dans un autre milieu plus facile ou plus difficile à pénétrer: de ſorte que le ſinus d'un angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de ſon angle briſé, comme le ſinus d'un autre angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de ſon angle briſé. C'eſt pourquoi ſi l'on a une fois connu par expérience un angle briſé, pour quelque angle d'inclinaiſon que ce ſoit, il ſera facile de connoître par ſupputation les angles briſés pour tous les autres angles d'inclinaiſon.

Parce que les deux lignes AH, CD, ſont paralleles, l'angle E eſt égal à l'angle de réfraction HBE: & parce que dans tout triangle rectiligne les ſinus des angles ſont proportionnels à leurs côtés oppoſés, on connoît que le ſinus de l'angle briſé EBF, eſt à ſon côté oppoſé EF, comme

le ſinus de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaiſon ABG, au rayon de réfraction BE. Et comme on a reconnu par expérience, que lorſque la boule BCD eſt de verre, le ſinus de l'angle briſé EBF eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon ABG, ou BFC, comme 2 eſt à 3, il s'enſuit que ſi la ligne EF eſt de 200 parties, le rayon de réfraction BE en doit contenir 300. Ainſi on peut facilement trouver, par la trigonométrie, l'angle E, ou l'angle de réfraction HBE, l'angle briſé EBF, & le demi-diametre BF, lorſque l'on connoît l'angle d'inclinaiſon ABG, ou ſon égal BFC, dans le triangle obliquangle BEF, où trois choſes ſont connues; ſçavoir, le côté BE de 300 parties, le côté EF de 200, & l'angle BFE, qui eſt le reſte, à 180 degrés de l'angle BFC, qui eſt égal à l'angle d'inclinaiſon ABG, que l'on ſuppoſe connu.

Suppoſons que l'angle d'inclinaiſon ABG ſoit de 10 degrés, auquel cas l'angle BFE ſera de 170 degrés, & qu'on veuille trouver l'angle briſé EBF, on fera cette analogie,

Comme le côté BE	300
Au ſinus de l'angle oppoſé BFE.	17365
Ainſi le côté EF	200
Au ſinus de l'angle briſé EBF	11577

qui ſe trouvera d'environ 6°, 39′, & qui étant ôté de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaiſon ABG, que nous avons ſuppoſé de 10 degrés, donnera 3°, 31′, pour l'angle de réfraction HBE, ou pour l'angle E, qui ſervira à trouver le demi-diametre BF, par cette analogie.

Pl. 24, fig. 73.

Comme le ſinus de l'angle BFE	17365
A ſon côté oppoſé BE	300
Ainſi le ſinus de l'angle E	5843
A ſon côté oppoſé BE	101

Mais ſi le demi-diametre BF eſt déja connu, comme s'il avoit 100 parties, on trouvera dans les mêmes parties la ligne EF, en faiſant dans le même triangle BEF, cette analogie,

Comme le demi-diametre BF	101
A la ligne EF	200
Ainſi le même demi-diametre BF	100
A la même ligne EF	198

à laquelle ajoutant le demi-diametre FC, 100, on aura 298 pour la ligne CF.

C'eſt de cette maniere qu'on a ſupputé la table ſuivante, où l'on trouve vis-à-vis de l'angle d'inclinaiſon ABG, la quantité de l'angle briſé EBF, &

ABG	EBF	HBE	CE	ABG	EBF	HBE	CE
1	0. 40	0. 20	300	11	7. 18	3. 42	297
2	1. 20	0. 40	300	12	7. 58	4. 2	297
3	2. 0	1. 0	300	13	8. 38	4. 22	297
4	2. 40	1. 20	300	14	9. 16	4. 44	296
5	3. 20	1. 40	300	15	9. 56	5. 4	295
6	4. 0	2. 0	299	16	10. 35	5. 25	295
7	4. 40	2. 20	299	17	11. 14	5. 46	294
8	5. 19	2. 41	298	18	11. 55	6. 7	293
9	5. 59	3. 1	298	19	12. 32	6. 28	292
10	6. 39	3. 21	298	20	13. 11	6. 49	292

& de l'angle de réfraction HBE, avec celle de la ligne CE ; le diametre CD de la ſphere de verre étant ſuppoſé de 200 parties. Pl. 24, fig. 73.

Nous n'avons pas prolongé cette table au-delà du vingtieme degré d'inclinaiſon, parce qu'elle ſuffit pour faire voir en quelle proportion la ligne CE décroît, car elle décroît fort lentement, étant par-tout à peu près égale à trois demi-diametres, puiſque ſa plus grande différence n'eſt qu'environ de la vingt-cinquieme partie du diametre; ce qui fait que la ligne DE eſt preſque égale au demi-diametre de la même ſphere, c'eſt-à-dire, la ligne DF.

Cette ligne DE, qui ſe trouve de 92 parties pour un angle d'inclinaiſon de 20 degrés, comme on le connoît en ôtant CD de CE, ou 200 de 292, ſervira à trouver le foyer O. Mais il faut remarquer auparavant que l'angle briſé EBF eſt preſque double de l'angle de réfraction HBE, & que cet angle de réfraction HBE eſt à peu près égal à la troiſieme partie de l'angle d'inclinaiſon ABG, comme on le voit ſans peine dans la table précédente.

Pour trouver le foyer O, on conſidérera que puiſque les lignes DE, DF, ſont preſque égales, les angles IEF, IFE étant à peu près égaux, ce qui fait que l'angle EIL qui leur eſt égal, eſt preſque double de chacun, & par conſéquent de l'angle E. Cela étant ſuppoſé, ſi on conſidere la ligne OI comme un rayon d'incidence, en ſorte que l'angle OIL ſoit un angle d'inclinaiſon, alors la ligne IB ſera un rayon de réfraction, l'angle OIE ſera un angle de réfraction, & l'angle EIL un angle briſé. On connoîtra auſſi que cet angle briſé EIL eſt double de l'angle de réfraction EIO, comme nous avons remarqué auparavant.

Pl. 24, fig. 73. D'où il ſuit que les deux angles E, EIO, ſont égaux entre eux, & que par conſéquent les lignes OE, EI, ſont auſſi égales entre elles. Et parce que la ligne OI eſt preſque égale à la ligne OD, la ligne OE ſera auſſi preſque égale à la ligne OD. Ainſi le foyer O eſt à peu près au milieu de la ligne DE, & par conſéquent la ligne DO eſt égale à la moitié de la ligne DE, ou du demi-diametre DF. Si donc on prend ſur le diametre prolongé la ligne DO égale à la moitié du demi-diametre DF, ou au quart du diametre CD, on aura en O le foyer qu'on cherche.

REMARQUE.

L'angle EBF, qui eſt un angle briſé à l'égard du rayon d'incidence AB, qui ſortant de l'air pour entrer dans le verre, ſe briſe par la ligne BE, qui eſt un rayon de réfraction, devient un angle d'inclinaiſon à l'égard du rayon d'incidence IB, qui ſortant du verre pour entrer dans l'air, ſe briſe réciproquement par la ligne AB, qui ſera un rayon de réfraction. Et comme cet angle EBF eſt double de l'angle de réfraction HBE; on voit que lorſqu'un rayon d'incidence ſort du verre pour entrer dans l'air, l'angle d'inclinaiſon eſt double de l'angle de réfraction; ce qu'il eſt bon de remarquer, parce que cela nous ſervira pour le problême ſuivant.

Des lentilles de verre, propres à produire du feu aux rayons du ſoleil.

LEs lentilles de verre qui ſervent à produire du feu, étant expoſées directement aux rayons du ſoleil, peuvent être plates d'un côté & convexes de l'autre, comme un ſegment de ſphere; ou bien convexes des deux côtés, comme les lunettes des vieillards, & les microſcopes qui groſſiſſent extraordinairement les objets, & ſervent à découvrir les moindres parties & les plus petits corps de la nature; ou bien convexes d'un côté & concaves de l'autre: celles-ci ne ſont pas ſi utiles que les autres, parce qu'elles ne peuvent ſervir à produire du feu que quand leur convexité eſt tournée directement au ſoleil; car lorſque leur concavité regarde le ſoleil, les rayons de réfraction au lieu d'être *convergens* deviennent *divergens*, c'eſt-à-dire, qu'ils s'écartent les uns des autres; ce qui les empêche de s'unir, & de produire du feu, comme nous ferons voir dans la ſuite.

PROBLEME XXX.

Trouver le foyer des lentilles de verre convexes d'un côté & planes de l'autre, faites en forme de ſegment de ſphere.

I.

EXpoſons premierement au ſoleil la ſurface plane FC de la lentille de verre IBC, dont la convexité FBC a ſon centre E dans l'axe d'incidence EBH, qui diviſe l'arc FBC en deux également au point B, & ſa corde FC auſſi en deux également au point I. C'eſt auſſi dans cet axe EH Pl. 24, fig. 74

Pl. 24, fig. 74. que ſe trouve le foyer H de tous les rayons d'incidence qui lui ſont paralleles, & par conſéquent perpendiculaires à la ſurface plane FC. Ce foyer H, ou ſa diſtance BH depuis la convexité du miroir, ſe déterminera en cette ſorte.

Soit un rayon d'incidence DA, lequel étant parallele à l'axe d'incidence EH, tombera ſur la ſurface plane FC à angles droits, & la traverſera par conſéquent ſans ſe briſer; mais étant parvenu au point A de la ſurface convexe, il ſe briſera en ſortant du verre; & au lieu d'aller droit en G, il ſe détournera par le rayon de réfraction AH, qui coupera l'axe d'incidence EH au point H, où tous les autres rayons d'incidence, paralleles au rayon DA, s'uniront par réfraction, pourvu néanmoins que l'arc BC ou BF ne ſoit pas plus grand que 10 degrés; car les rayons de réfraction ne s'uniroient pas au même point H, mais plus près du point B, ſi ces arcs étoint plus grands que 20 degrés, comme on l'a vu dans le problême précédent. Ainſi le point H ſera le foyer, parce que c'eſt le lieu où les rayons du ſoleil s'uniſſant par réfraction, peuvent produire du feu.

Cela étant ſuppoſé, on conſidérera que l'angle d'inclinaiſon DAE, ou ſon égal AEH, étant double de l'angle de réfraction GAH, ou AHE ſon égal, comme nous avons vu au problême précédent, le ſinus de l'angle AEH ſera preſque double du ſinus de l'angle AHE, à cauſe de la petiteſſe de ces angles. Mais parce que dans un triangle rectiligne les côtés ſont proportionnels aux ſinus de leurs angles oppoſés, le côté AH ſera auſſi preſque double du côté AE; & comme le côté AH approche d'être égal à la ligne BH, il s'enſuit que la diſtance BH du foyer H à la ſurface convexe

FBC eſt preſque double du demi-diametre AE ; ou BE, & que par conſéquent toute la diſtance EH eſt à peu près triple de ce demi-diametre.

II.

Mais ſi l'on tourne la partie convexe FBC vers le ſoleil, le rayon DA, & tous les autres paralleles à l'axe d'incidence EB, ſe briſeront deux fois avant que de s'unir au point K, qui ſera le foyer ; une fois en entrant dans le verre par la ligne AH, qui s'approche de la perpendiculaire EAO ; & une ſeconde fois en ſortant du verre par la ligne LK, qui s'écarte de la perpendiculaire LM. Pl. 24, fig. 75.

Il eſt évident, par ce qui a été dit au problême précédent, que dans la premiere réfraction l'angle d'inclinaiſon DAO, ou AEB, eſt triple de l'angle de réfraction GAH, ou AHE, & que par conſéquent la ligne AH eſt triple du demi-diametre EA. Mais parce que la ligne AH eſt preſque égale a la ligne BH, cette ligne BH ſera auſſi preſque triple du même demi-diametre AE, ou BE, comme auparavant ; ce qui fait connoître que le foyer ſeroit en H, s'il n'y avoit qu'une réfraction ; mais comme il y en a deux :

Il eſt évident auſſi par la remarque du problême précédent, que dans la ſeconde réfraction HLM, ou KHL eſt double de l'angle de réfraction KLM, par conſéquent la ligne KL eſt double de la ligne KH. Et parce que la ligne KL eſt preſque egale à la ligne KB, lorſque la lentille BI eſt fort mince, comme nous la ſuppoſons ici, cette ligne KB eſt auſſi preſque double de la ligne KH ; par conſéquent toute la ligne BH eſt à peu près triple de la ligne KH. Mais nous avons reconnu que la même ligne BH eſt auſſi triple du

demi-diametre BE; il s'enſuit donc que ce demi-diametre BE eſt égal à la ligne KH, & par conſéquent la ligne KB eſt double du demi-diametre BE, ou égale à tout le demi-diametre. Si donc on porte le demi-diametre EB depuis le centre E en K, ce point K ſera le foyer qu'on cherche.

PROBLEME XXXI.

Trouver le foyer des lentilles de verre convexes des deux côtés.

Pl. 24, fig. 76. POur trouver le foyer de la lentille de verre ABCD, dont l'axe EI paſſe par le centre E de la convexité ADC, & par le centre F de la convexité ABC, tirez un rayon quelconque d'incidence GH parallele à l'axe EI, & ayant pris ſur cet axe la ligne BI triple du demi-diametre BF, menez la droite HI, qui donnera le point K de la ſeconde réfraction. Par ce point K tirez du centre E la droite EKM, qui ſera perpendiculaire à la ſurface rompante ADC. La ligne IK étant conſidérée comme un rayon d'incidence, l'angle IKM ſera un angle d'inclinaiſon, lequel eſt double de l'angle de réfraction, comme il a été remarqué au problême précédent : ſi donc on fait en K l'angle IKL égal à la moitié de l'angle IKM, on aura en L le foyer qu'on cherche, à l'égard de la convexité ABC expoſée au ſoleil.

REMARQUE.

Lorſque les demi-diametres ED, BF, ſeront égaux entre eux, c'eſt-à-dire, lorſque les convexités ABC, ADC, ſeront des portions égales de

la ſuperficie d'une même ſphere, le foyer ſe trouvera à peu près au centre F de la convexité ABC expoſée au ſoleil, ou au centre E de la convexité ADC tournée vers le ſoleil. Mais ſoit que les demi-diametres ED, BF, ſoient égaux ou inégaux, la diſtance du foyer L ſera toujours la même, en tournant vers le ſoleil celle qu'on voudra des deux convexités ABC, ADC.

PROBLEME XXXII.

Trouver le foyer des lentilles de verre convexes d'un côté & concaves de l'autre.

I.

LE foyer d'une ſemblable lentille ſe trouve comme dans la précédente, lorſque ſa convexité regarde le ſoleil. Mais il y a une méthode abrégée pour le trouver, quand le diametre de la concavité eſt triple de celui de la convexité. Alors le foyer ſe trouve éloigné d'un diametre & demi, ou de trois demi-diametres, de la convexité, que nous ſuppoſons tournée vers le ſoleil, c'eſt-à-dire, qu'il eſt au centre de la concavité, en conſidérant l'épaiſſeur de la lentille comme très-petite. Pl. 24, fig. 77.

Propoſons la lentille de verre ABCD, telle que le demi-diametre EB de la convexité ABC, qui eſt expoſée au ſoleil, ſoit la troiſieme partie du demi-diametre FD de la concavité ADC. Cela étant, je dis que tous les rayons d'incidence paralleles à l'axe BF, comme GH, s'uniront par réfraction au centre F de la concavité ADC: car ce rayon GH traverſant le verre, ſe briſera par la droite HI, qui étant continuée paſſeroit par le point F, éloigné de la convexité ABC de trois

demi-diametres, comme on l'a vu auparavant. Mais ce rayon de réfraction HF, ſe trouvant perpendiculaire à la ſurface concave ADC, ne ſe briſera point en I, lorſqu'il ſortira du verre ; il continuera directement vers le point F, lequel par conſéquent ſera le foyer qu'on cherche.

I.

Pl. 24, fig. 78. Mais ſi l'on tourne la concavité vers le ſoleil, le foyer ſe trouvera de même que dans les articles précédens. On pourra auſſi le trouver par une méthode plus courte, lorſque le demi-diametre AB de la concavité ſera la troiſieme partie du demi-diametre CD de la convexité. Dans ce cas, le foyer ſe trouvera au centre C de la convexité, lorſque l'épaiſſeur BD de la lentille ne ſera pas conſidérable ; ce qu'il faut toujours ſuppoſer, comme on le connoîtra par un raiſonnement ſemblable au précédent. Mais on ne peut tirer aucune utilité d'une telle lentille expoſée au ſoleil, puiſque ſes rayons de réfraction s'écartent, au lieu de s'unir. Ainſi le point C n'eſt appellé foyer qu'improprement, parce que les rayons de réfraction ne peuvent pas s'aſſembler en ce point, qui eſt du côté du ſoleil ; mais ils s'écartent par des lignes qui tendent à ſe réunir en ce point.

REMARQUES.

I.

Ce foyer C, qui ne peut ſervir à produire du feu, eſt appellé *foyer virtuel*, pour le diſtinguer du *foyer véritable*, où les rayons du ſoleil s'uniſſant par réfraction, peuvent produire du feu.

On peut trouver ce foyer véritable par cette

analogie, qui ſuppoſe que l'épaiſſeur de la lentille, dont la convexité regarde le ſoleil, eſt très-petite.

Comme la différence des demi-diametres de la concavité & de la convexité,
Au demi-diametre de la convexité;
Ainſi le diametre de la concavité,
A la diſtance du foyer à la lentille.

II.

Dans une lentille convexe des deux côtés, le foyer, qui eſt toujours véritable, ſe peut trouver par cette analogie, qui, comme la précédente, ſuppoſe que l'épaiſſeur de la lentille eſt très-petite.

Comme la ſomme des demi-diametres des deux convexités,
Au demi-diametre de l'une des convexités;
Ainſi le diametre de l'autre convexité,
A la diſtance du foyer à la lentille.

III.

Cette analogie ſervira auſſi à trouver le foyer d'une lentille concave des deux côtés; mais comme ce foyer n'eſt que virtuel dans cette eſpece de lentilles, auſſi-bien que dans celles qui ſont plates d'un côté & concaves de l'autre, nous n'en parlerons pas davantage.

IV.

Si l'on fait une lentille de verre ABCG, concave d'un côté, & convexe de l'autre, en ſorte que la convexité ABC ſoit la ſurface d'une portion de ſphéroïde produit par la circonvolution Pl. 24, fig. 79.

Pl. 24, fig. 79. de l'ellipſe ABCD, autour de ſon grand axe BD, qui ſoit à la diſtance EF des deux foyers E, F de l'ellipſe, comme 3 eſt à 2, & dont la concavité AGC ait pour centre le foyer E; en expoſant cette lentille aux rayons du ſoleil, en ſorte que ſa convexité ABC regarde directement le ſoleil, tous les rayons d'incidence qui ſeront paralleles au grand axe BD, s'uniront par réfraction au foyer E, lequel par conſéquent ſera le foyer véritable de cette lentille ſphérico-elliptique. Sa convexité ſe peut auſſi faire hyperbolique; mais cela eſt trop ſpéculatif pour des récréations mathématiques. Voyez la dioptrique du Pere Deſchales.

V.

Ce ſeroit ici le lieu de parler des grands verres ardens de M. Tſchirnaus, & principalement de celui que ce gentilhomme Saxon a vendu à M. le duc d'Orléans; mais il trouvera ſa place dans les problêmes de phyſique, où l'on aura encore occaſion de parler des lentilles & de leurs effets. On ajoutera cependant quelques effets de ces verres, dont il eſt fait mention dans les actes des ſavans, de l'année 1697, page 415 & ſuivantes. Le bois le plus dur, humecté même d'eau, mis à leur foyer, prend feu en un moment; l'eau bout auſſi-tôt qu'elle y eſt préſentée, pourvu qu'elle ſoit contenue dans un petit vaſe; les métaux ſe fondent; les briques, la pierre de ponce, la porcelaine d'Hollande & l'asbeſte ſe changent en verre; le ſouffre, la colophone, la poix & les autres matieres de même nature, ſe liquéfient en eau; les charbons & les cendres ſe vitrifient: en un mot, tout ce qu'on préſente au foyer de ces verres ardens ſe fond, ou ſe change en chaux, ou s'évapore dans l'air.

Comme ces lentilles ſont fort grandes, on a ſoin, pour faire ces expériences, d'ajouter une petite lentille vers le foyer de la grande, afin de raſſembler en un eſpace plus proche les rayons rompus.

PROBLEME XXXIII.

Repréſenter dans une chambre fermée les objets de dehors avec leurs couleurs naturelles, par le moyen d'une lentille de verre convexe des deux côtés.

AYant fermé la porte & les fenêtres de la chambre, en ſorte que toutes les avenues ſoient bouchées à la lumiere, excepté un petit trou que l'on fera à une fenêtre qui reponde ſur quelque place fréquentée, ou ſur quelque beau jardin, ſi cela ſe peut; appliquez à ce trou une lentille de verre convexe des deux côtés, qui ait fort peu d'épaiſſeur, afin que ſon foyer ſoit plus éloigné, comme un verre des lunettes dont ſe ſervent les vieillards. Alors les images des objets de dehors, qui paſſeront au travers de ce verre, étant reçues ſur un linge blanc tendu à plomb, ou ſur un carton bien blanc placé au foyer du même verre, y paroîtront avec leurs couleurs naturelles, & même plus vives que le naturel, ſur-tout lorſque le ſoleil les éclairera. Il ne faut point que le verre ſoit expoſé au ſoleil, parce que la trop grande lumiere frappant le verre empêcheroit de diſcerner avec plaiſir les images des objets extérieurs, qui ſans cela s'y diſtingueront d'une telle maniere avec leurs mouvemens, que l'on pourra ſans peine diſcerner les hommes d'avec les animaux qui paſſe-

ront, & même un homme d'avec une femme, remarquer les oiſeaux qui voleront en l'air & connoître s'il y a du vent par le tremblement des herbes ou des feuilles des arbres, qui ſe rendra ſenſible ſur le linge ou ſur le carton.

REMARQUES.

I.

On peut auſſi ſans verre diſtinguer ſur une muraille de la chambre, ou ſur le plancher, les images des objets extérieurs, & principalement de ceux qui ſont en mouvement; mais ces images ne paroiſſent pas avec tant d'agrément & de diſtinction, parce que leurs couleurs ne ſont que ſombres & mortes. Or de quelque maniere qu'on les voie, elles paroîtront toujours renverſées; mais on les peut redreſſer en pluſieurs manieres: ce qui ne ſert pourtant de rien, parce que cela n'augmente pas le plaiſir qu'il y a de les voir avec un verre dans leurs couleurs naturelles, & ne diminue en rien l'uſage qu'on en tire, qui eſt que l'on peut repréſenter en raccourci ſur le carton les payſages, & tout ce qui pourra envoyer ſon image ſur ce carton. Ce qui ſe fera en paſſant un crayon ſur tous les traits de cette repréſentation, qui paroîtra comme en perſpective, dont les parties ſeront d'autant mieux proportionnées, que la lentille de verre ſera moins épaiſſe par le milieu, & que le trou par où les eſpeces paſſent pour entrer dans le verre, ſera petit. Ce trou ne doit pas avoir une épaiſſeur conſidérable; c'eſt pourquoi il doit être fait dans une platine de métal bien mince, qu'on appliquera contre le trou de la fenêtre, qu'il eſt bon de faire un peu grand, afin de don-

ner un paſſage libre aux eſpeces ou images des objets de dehors, qui ſeront de côté.

II.

On peut auſſi voir dans une chambre dont les fenêtres ſeront fermées, pourvu que la porte ſoit ouverte, ce qui ſe paſſe au dehors par le moyen de pluſieurs miroirs plans, qui pourront ſe communiquer par réflexion les eſpeces l'une à l'autre, &c.

III.

J'ai oublié de dire que, par cette maniere de repréſenter ſur une ſurface les images des objets avec une lentille de verre, les phyſiciens expliquent comment ſe fait la vue, en prenant le creux de l'œil pour la chambre fermée, le fond de l'œil ou la rétine pour la ſurface qui reçoit les eſpeces, le criſtallin pour la lentille de verre, & le trou de la prunelle pour le trou de la fenêtre par où paſſent les eſpeces ou images des objets.

IV.

L'œil artificiel repréſente beaucoup mieux l'œil naturel que cette chambre fermée. On va le décrire tel qu'il ſe trouve dans les *expériences phyſiques de M. Poliniere*, qui nous a communiqué dans ce livre ſes découvertes ſur la phyſique, avec pluſieurs autres, qu'il a rendu fort claires, tant par l'expoſition des expériences, que par leur explication. * Page 472, ſeconde édition.

AB eſt une boule de bois creuſe, qu'on peut ſéparer en deux parties en DE; ſon diametre eſt d'environ 5 à 6 pouces. En BC eſt un verre len- Pl. 25, fig. 12.

ticulaire, dont le foyer en eſt éloigné de 5 pouces ou environ. FA eſt un tuyau collé à la boule AB en AH : ce tuyau eſt de 8 à 9 pouces de long, & il a 2 pouces & demi de diametre. GA eſt un tuyau qui entre dans l'autre FA, & qui porte à ſon extrêmité AH un papier huilé, ou un verre plan, qui a été un peu dépoli en le frottant ſur une ſurface plane avec du ſable broyé. Ce verre eſt appliqué au bout du tuyau mobile GA, pour être facilement placé au foyer du verre CB.

Si l'œil eſt placé vers G pour regarder le verre AH, en repouſſant un peu, ou en retirant le tuyau G, il appercevra diſtinctement les objets extérieurs peints ſur le verre AH dans une ſituation renverſée.

On voit que dans cet œil artificiel la lentille BC tient la place des humeurs de l'œil, & le verre bruni ou papier huilé AH, celle de la rétine, que l'on croit vraiſemblablement tranſmettre au cerveau les images qui y ſont peintes.

V.

Pour bien voir ces images dans l'œil naturel, il faut ſéparer un œil de mouton des chairs & peaux dont il eſt entouré, & couper un peu du fond de cet œil, pour découvrir l'humeur vitrée. Alors y ayant mis un petit morceau de papier huilé, & ayant placé le devant de cet œil à une petite ouverture de fenêtre d'une chambre fermée, l'image des objets éclairés paroît ſur ce papier dans une ſituation renverſée. Cet œil étant de même expoſé vis-à-vis d'une bougie allumée, l'image de la flamme paroît renverſée ſur ce papier ; les objets proches ſont mieux repréſentés que les objets éloignés.

L'œil de mouton eſt préférable à celui de bœuf,

ou de veau, parce que la prunelle des moutons ou des brebis ne ſe ferme pas tant en mourant que celle des bœufs.

PROBLEME XXXIV.

Conſtruire une chambre obſcure qu'on puiſſe tranſporter.

FAites une caiſſe de bois ABCD, à laquelle vous donnerez environ 9 pouces de largeur, & 2 ou trois pieds de longueur, plus ou moins, ſelon la diſtance des foyers des lentilles dont vous voulez vous ſervir. Ajuſtez à l'un des côtés un tuyau EF, ou pluſieurs qui s'emboîtant l'un dans l'autre, puiſſent s'allonger ou ſe r'accourcir, ſelon le beſoin : vous appliquerez dans ce tuyau deux, ou même trois lentilles convéxes des deux côtés. Les foyers des lentilles extérieures auront environ 7 pouces de diſtance, & celui de la lentille intérieure aura environ 5 pouces. Vous attacherez un papier huilé GH, qui ſera ſuſpendu perpendiculairement à travers la caiſſe dans le lieu où l'on jugera que ſe doivent peindre les images des objets, dont les rayons auront été rompus dans les verres lenticulaires du tuyau. Enfin ménagez au côté oppoſé au tuyau une ouverture en I, qui ſoit aſſez grande pour recevoir les deux yeux. La caiſſe doit être bien fermée de tous côtés. Pl. 23, fig. 13.

Quand vous voudrez voir quelques objets, vous tournerez le tuyau garni de ſes lentilles vers ces objets, & vous les ajuſterez de maniere que l'image en ſoit peinte clairement ſur le papier huilé. Ce que vous reconnoîtrez en regardant par l'ouverture I. Pour mieux voir, il eſt bon de s'en-

velopper la tête & l'ouverture, afin qu'il n'y entre point de lumiere par cette ouverture. Les objets paroîtront repréſentés avec toutes leurs couleurs, de même que dans la chambre fermée qu'on a décrite dans le problême précédent.

REMARQUES.

I.

Wolfius rapporte dans ſa dioptrique, une autre conſtruction de chambre obſcure, pour redreſſer les images des objets qu'on voit dans une ſituation renverſée. Si l'on veut voir quelque choſe de ſingulier en ce genre, il faut conſulter les expériences phyſiques citées ci-deſſus, dans les expériences 101 & 103 de la ſeconde édition.

II.

Mais on augmentera la multiplicité des objets, ſi on ajuſte à la place du premier verre lenticulaire un verre à facettes, pour recevoir les rayons des objets, & qu'on mette à ſon foyer un autre verre convexe dans le tuyau de la chambre obſcure. Ces verres à facettes ſont une curioſité d'optique dont on parlera dans le problême ſuivant.

III.

Voici la deſcription d'une autre chambre obſcure, inventée par G. J. s'Graveſande, qui l'a donné à la ſuite de ſon eſſai de perſpective.

Pl. 25, fig. 14. Cette machine a la forme à peu près d'une chaiſe à porteur. Le deſſus en eſt arrondi vers le derriere, par le devant elle eſt faite en talus juſqu'à la moitié de ſa hauteur. Voyez la figure

re qui repréſente cette machine, dont le côté oppoſé à la porte eſt ſuppoſé enlevé, pour qu'on en puiſſe voir le dedans. Pl. 25, fig. 14.

1. Au dedans, la planche A ſert de table; elle tourne ſur deux chevilles de fer qui entrent dans les bois qui forment le devant de la machine. Cette table eſt ſoutenue par deux chainettes; de ſorte qu'on peut la ſoulever pour entrer plus commodément par la porte qui eſt de côté.

2. De part & d'autre, il y a vers le derriere de la machine un tuyau de fer blanc recourbé vers les deux bouts, comme on le voit dans la figure 15. Ce tuyau ſe place dans la garniture qui eſt au dedans, & il a une de ſes extrêmités, qui donne dans la machine, & une qui aboutit au-dehors: il ſert à donner de l'air, ſans que la lumiere y puiſſe paſſer. On peut avoir pluſieurs de ces tuyaux, & les ajuſter à la chaiſe, ſi on en a beſoin pour donner plus d'air. Fig. 15.

3. Au derriere de la machine en dehors ſont attachés quatre petits fers *c*, *c*, *c*, *c*, dans leſquels gliſſent deux regles de bois DE, DE, leſquelles ſont de la largeur d'environ trois pouces. Au travers de ces deux regles, paſſent vers DD deux lattes qui tiennent attachée une planche F, laquelle par leur moyen on peut faire avancer & reculer. Fig. 14.

4. Au-deſſus de la machine, il y a une planche longue d'environ quinze pouces, & large de neuf, dans laquelle il y a une échancrure PMOQ, longue de neuf ou dix pouces, & large de quatre.

5. On attache ſur cette planche deux regles faites en forme de queue d'aronde, entre leſquelles on fait gliſſer une autre planche de même longueur que la premiere, & large d'environ ſix pouces. Cette ſeconde planche eſt percée par le milieu,

Pl. 25. fig. 14. & dans cette ouverture, qui doit avoir trois pouces de diametre, on fait un écrou, qui ſert à élever & à abaiſſer un cilindre, ſur lequel il y a une vis, & dont la hauteur eſt d'environ quatre pouces. C'eſt dans ce cilindre, comme on le verra dans la ſuite, qu'eſt placé le verre convexe.

6. On fait gliſſer au-deſſus de la planche dont on a parlé N°. 4, une boîte X, en forme de petite tour quarrée, large d'environ ſept ou huit pouces, & haute de dix; le côté B, qui lui ſert de porte, eſt tourné vers le devant de la machine. Le derriere de cette boîte a vers le bas une ouverture quarrée N, d'environ quatre pouces, laquelle peut ſe fermer par une petite planche I, qui gliſſe entre deux regles.

7. Au-deſſus de cette ouverture quarrée il y a une fente parallele à l'horiſon, & qui tient toute la largeur de la boîte: par cette fente on fait entrer dans la boîte un petit miroir, qui des deux côtés gliſſe entre deux regles placées de telle maniere, que la glace du miroir, qui eſt tournée vers la porte B, fait avec l'horiſon un angle de cent douze degrés & demi.

8. Ce miroir, ſur le milieu du côté qui reſte hors de la boîte, a une petite platine de fer qui tient lieu de baſe à une petite vis, laquelle avance & ſert à arrêter le miroir dans l'endroit où on le voit en H. Pour le fixer ainſi, on fait paſſer la vis dans un petit trou qu'on fait dans la planche dont il eſt parlé N°. 5, & par une fente qu'on fait pour cet effet dans la planche qui eſt au-deſſous de celle-là, & dont on a parlé N°. 4. Ce miroir ſe tourne verticalement de tous côtés, & on l'arrête par le moyen d'un écrou R. Quand on ôte le miroir de cette ſituation, la fente dont on vient de par-

ler, ſe ferme par une petite planche, qui au dedans de la machine gliſſe entre deux petites regles. Quant à la fente dont il eſt parlé N°. 7, elle ſe ferme en partie par la planche I, quand on ouvre l'ouverture N, & les deux bouts, qui reſtent ouverts, ſe ferment par de petites regles.

9. A un des côtés de la boîte, on fait gliſſer une regle dans deux petits fers, pareils à ceux qui ſont au derriere de la machine N°. 3. Cette regle paſſe de quelques pouces le derriere de la boîte, & à ſon extrêmité elle a un trou par où l'on fait paſſer la vis du miroir dont je viens de parler; de ſorte qu'on peut incliner ce miroir ſous toutes ſortes d'angles au devant de l'ouverture N.

10. Outre ce premier miroir, il y en a un autre marqué L, qui eſt plus petit: il eſt attaché vers ſon milieu à une latte qui paſſe par le milieu du haut de la boîte. Cette latte peut s'arrêter à vis, & elle ſert à élever & à abaiſſer le miroir qui lui eſt attaché de maniere à pouvoir être fixé à toutes ſortes d'inclinaiſons.

REMARQUE.

Ceux qui croiront que les tuyaux dont il eſt parlé N°. 2, ne ſuffiſent point pour donner de l'air à la machine, pourront mettre ſous le ſiege un petit ſoufflet, qu'on fera agir par le moyen du pied. De cette maniere on renouvellera continuellement l'air de la machine, le ſoufflet chaſſant celui qui y eſt, & obligeant ainſi celui de dehors d'entrer par les tuyaux.

Uſages de la machine qu'on vient de décrire.

I.

Repréſenter les objets dans leur ſituation naturelle.

Pl. 25. fig. 14. QUand on veut repréſenter les objets dans cette machine on étend un papier ſur la table; ou bien, ce qui eſt mieux, on étend le papier ſur une autre planche, en ſorte qu'il déborde, & on inſere cette planche ainſi couverte dans un cadre, de maniere qu'elle ſoit fixée par le moyen de deux regles faites en forme de queue d'aronde.

On met dans le cilindre C, qui tourne à vis dans le haut de la machine, un verre convexe, dont le foyer eſt à une diſtance à peu près égale à la hauteur de la machine au-deſſus de la table : on ouvre par derriere la boîte qui eſt au-deſſus de la machine, & on incline vers cette ouverture le miroir L; en ſorte qu'il faſſe avec l'horiſon un angle demi-droit, quand on veut repréſenter les objets pour le tableau perpendiculaire. Alors ſi on ôte le miroir H, & la planche F, auſſi-bien que les regles DE, DE; on verra ſe placer ſur le papier tous les objets qui envoyent ſur le miroir L des rayons qui peuvent être réfléchis ſur le verre convexe, lequel on éleve ou l'on abbaiſſe par le moyen de la vis du cilindre, juſqu'à ce que les objets paroiſſent entierement diſtincts.

Quand on veut repréſenter ces mêmes objets pour le tableau incliné, on doit donner au miroir la moitié de l'inclinaiſon qu'on veut donner au tableau.

Pour le tableau parallele, il faut fermer l'ouverture N, & ouvrir la porte B : après quoi il faut

élever le miroir L juſqu'au haut de la boîte, en le mettant dans une ſituation parallele à l'horiſon. Cette diſpoſition de la machine peut ſervir quand on eſt ſur un balcon, ou à quelque étage élevé, à deſſiner un parterre qui ſeroit au bas.

Si on vouloit deſſiner une ſtatue qui ſeroit dans un lieu un peu élevé, & qu'on voulût la repréſenter de la maniere qu'il faudroit la peindre contre un plafond, il faudroit tourner le derriere de la machine vers la ſtatue, & tourner auſſi la boîte en ſorte que la porte B regardât la ſtatue. Alors après avoir ouvert la porte, il faudroit mettre le miroir L verticalement, la glace tournée vers la ſtatue, & avancer ou reculer la boîte, ou bien élever ou abaiſſer le miroir, juſqu'à ce que les rayons qui viennent de la ſtatue ſur le miroir, puiſſent être réfléchis ſur le verre. Quand ces changemens de la boîte ou du miroir ne ſuffiſent pas pour donner cette réflexion ſur le verre, il faut avancer ou reculer la machine entiere.

II.

Repréſenter les objets en faiſant paroître à droite ce qui doit être à gauche.

AYant mis la boîte X dans la ſituation qu'on voit dans la figure, il faut ouvrir la porte B, & fermer l'ouverture N; puis mettant le miroir H dans la diſpoſition qui a été dite, N°. 7, élevez le miroir L vers le haut de la boîte, & inclinez le vers le premier miroir, en ſorte qu'il faſſe avec l'horiſon un angle de 22 degrés & demi; c'eſt-à-dire, que le deſſus de la machine, après une double réflexion, paroiſſe vertical dans le premier miroir.

Pl. 25, fig. 14. Pour le tableau incliné, il faut que le miroir L faſſe avec l'horiſon un angle égal à la moitié de l'angle de l'inclinaiſon du tableau, moins le quart d'un angle droit. On trouve cet angle avec aſſez de préciſion pour la pratique, en inclinant le miroir L juſqu'à ce que l'apparence du deſſus de la machine, après une double réflexion, paroiſſe dans l'autre miroir ſous un angle avec l'horiſon, égale à l'inclinaiſon qu'on veut donner au tableau. Si l'inclinaiſon du tableau étoit moindre que du quart de 90 degrés, il ne faudroit pas incliner le miroir L vers le premier, comme il vient d'être dit ci-deſſus, mais du côté oppoſé, en faiſant l'angle de l'inclinaiſon du miroir égal à la différence de l'angle de l'inclinaiſon du tableau, au quart de 90 degrés.

Quand on veut repréſenter les objets pour le tableau parallele, il faut mettre le miroir L dans la diſpoſition qui a été dite, article I, de l'uſage, & le miroir H dans celle qui a été dite au N°. 9, en l'inclinant vers l'horiſon ſous un agle demi-droit la glace tournée vers la terre, quand on ſuppoſe le tableau au-deſſous de l'œil, & vers le ciel, quand on le ſuppoſe au-deſſus.

Cette diſpoſition de la machine peut auſſi être d'uſage pour les tableaux inclinés, qui font avec l'horiſon un angle fort petit : mais alors il faut diminuer l'inclinaiſon d'un des miroirs, de la moitié de l'inclinaiſon du tableau.

III.

Pl. 25, fig. 14.

Repréſenter tour à tour les objets qui ſont aux environs d'une campagne ou d'un jardin, au milieu duquel on a placé la machine, & faire paroître ces objets redreſſés devant celui qui eſt aſſis dans la machine.

IL faut tourner le dos de la machine vers le ſoleil, parce que les objets qui ſont derriere la machine, ſe repréſentant par une ſeule réflexion, leur apparence ſera toujours plus claire, bien qu'ils ſoient dans l'ombre, que celle des objets placés aux autres côtés, & qui ne peuvent être vus que par une double réflexion.

Les objets qui ſont aux deux côtés de la machine, ſe repréſentent par le moyen du miroir H, ſitué comme on le voit dans la figure N, & 8. On couvre ce miroir d'une tour ou boîte de carton, ouverte du côté des objets, comme auſſi du côté de l'ouverture N de la boîte X : on doit uſer de cette précaution ; car ſi on laiſſe le miroir entierement expoſé, il réfléchira ſur le miroir L les rayons de lumiere qui viennent de côté, leſquels entrant par le verre convexe, après avoir été réfléchis par le miroir L, affoibliront extrêmement la repréſentation.

Les objets qui ſont au-devant de la machine, ſe repréſentent comme il a été dit au commencement de l'article II.

IV.

Repréſenter des tableaux ou des tailles-douces.

LEs tableaux & les tailles-douces qu'on veut repréſenter, s'attachent contre la planche F, du côté qui regarde le derriere de la machine,

Pl. 25, fig. 14. que l'on tourne en ſorte que ces tailles-douces ſoient expoſées au ſoleil. Dans cette ſituation on les repréſente comme les autres objets (art. I.) avec cette ſeule différence, qu'il faut changer le verre convexe, qui eſt dans le cilindre C : car ſi on ſe propoſe de donner aux tailles-douces leur véritable grandeur ; il faut que la diſtance du foyer à ce verre ſoit égale à la moitié de la hauteur de la machine au-deſſus de la table, c'eſt-à-dire, à la moitié de AC. Si on vouloit dans le deſſein donner à ces mêmes figures plus de grandeur qu'elles n'en ont véritablement, il faudroit que la diſtance du foyer à ſon verre fût encore plus petite ; & il faudroit au contraire qu'elle fût plus grande, ſi on vouloit repréſenter les figures plus petites qu'elles ne ſont. L'éloignement dans lequel il faut mettre les tailles-douces, ſe trouve en avançant ou en reculant la planche F, juſqu'à ce qu'elles paroiſſent diſtinctement dans la machine. On peut déterminer cet éloignement par la propoſition ſuivante.

La hauteur de la machine au-deſſus de la table, moins la diſtance du foyer au verre eſt à
La hauteur de la machine au-deſſus de la table, comme *la diſtance du foyer au verre*, eſt à
La diſtance du verre à la figure.

Remarquez que cette diſtance du verre à la figure, ſe meſure par un rayon réfléchi, qui part de la figure parallelement à l'horiſon, & qui eſt réfléchi par le miroir perpendiculairement ſur le verre. Remarquez encore que quand on veut éloigner les figures au-delà du derriere de la machine, il faut les attacher contre le côté F de la planche, & là tourner en faiſant paſſer ſes lattes par les regles

DE, DE, de maniere que la face F regarde l'ouverture N.

REMARQUE I.

Sur la repréſentation des viſages.

Il ſeroit aſſurément très-curieux & très-utile de pouvoir deſſiner les viſages des hommes au naturel. La choſe réuſſit fort bien en petit, quand même l'apparence de la perſonne entiere n'occuperoit pas un demi-pouce ſur le papier, mais il y a plus de difficulté à réuſſir en grand.

REMARQUE II.

Sur l'ouverture du verre convexe.

Dans tout ce qui vient d'être dit, il ne faut pas négliger d'examiner l'ouverture qu'on doit donner au verre convexe; car bien qu'on ne puiſſe pas réduire cette ouverture à une meſure fixe, il ſera bon toujours de faire attention aux remarques ſuivantes. 1. Qu'on peut ordinairement donner au verre la même ouverture qu'on donneroit à une lunette d'approche, dont ce verre ſeroit l'objectif. 2. Qu'il faut diminuer cette ouverture, quand les objets ſont fort éclairés; qu'il la faut augmenter, quand au contraire ils ſont expoſés à un jour plus foible. 3. Que les traits paroiſſent mieux marqués avec une petite ouverture qu'avec une plus grande; & qu'ainſi lorſqu'on veut deſſiner, il faut donner au verre le moins d'ouverture qu'il ſera poſſible; avec cette précaution pourtant, qu'il ne faut pas trop exténuer la lumiere qui entre par-là dans la machine.

On voit par toutes ces remarques, qu'il eſt bon d'avoir pluſieurs pieces de fer blanc, ou de

Pl. 25. fig. 14. cuivre mince, qui ſoient rondes, de la grandeur du verre, & percées différemment, afin de pouvoir ainſi donner au verre l'ouverture dont on a beſoin. On pourroit encore faire différentes ouvertures dans une lame de cuivre, qu'on feroit gliſſer ſur le verre; ou ſe ſervir d'une plaque ronde, qui tournant ſur ſon centre, feroit paſſer ſur le verre des trous de différentes grandeurs.

REMARQUE III.

On trouvera dans l'eſſai de perſpective, qu'on a cité, les démonſtrations de tous ces uſages, & la deſcription d'une autre machine, qui a des avantages particuliers, mais qui cependant n'eſt point préférable à celle qu'on a décrite ici.

PROBLEME XXXV.

Des verres à facettes.

Pl. 26. fig. 16. LEs verres à facettes ſont des verres taillés à pluſieurs faces, tels que le verre LHIM, dont on n'a repréſenté ici que trois faces LH, HI, IM. Ces verres repréſentent autant de fois le même objet qu'ils ont de facettes; en ſorte que ſi un verre a 41 facettes, & qu'on regarde un ſoldat armé, en mettant l'œil dans le point où les rayons de l'objet qui ſe ſont briſés en paſſant dans les 41 faces, ſe croiſent, on voit une compagnie de 41 ſoldats, quoiqu'il n'y en ait qu'un.

C'eſt ce qu'on peut remarquer en jettant les yeux ſur la figure qui repréſente la coupe de trois faces. L'objet A envoie ſes rayons ſur les trois faces LH, IH, IM. Ces faces ſont tellement taillées, que ces rayons s'étant rompus en paſſant

par le verre, ils vont ſe croiſer au point G, où l'œil étant placé, il appercevra l'objet A en A, en B & en C, par les trois rayons directs GA, GB, GC: car on a coutume de rapporter dans la ligne droite, qui vient en dernier lieu frapper l'organe de la vue, les objets apperçus, quoique les rayons qui paſſent de ces objets ayent ſouffert pluſieurs détours, comme on le voit aſſez par les miroirs plans.

On peut enchâſſer un de ces verres à facettes à l'extrêmité d'un tuyau, & placer à l'autre extrêmité une lentille dans l'endroit où tous les rayons du verre à facettes ſe croiſent, & que j'ai appellé ſon foyer. On a repréſenté un de ces verres ainſi enchâſſés dans la figure HLIM. Pl. 26. fig. 17.

REMARQUE.

Si on préſente un verre à facettes aux rayons du ſoleil, & qu'on le mette à la ſeule ouverture qu'on aura laiſſé dans une chambre bien fermée, on verra repréſenter ſur un papier blanc, mis à une diſtance convenable, autant d'images du ſoleil qu'il y aura de facettes au verre: & ces images ſeront d'autant plus vives que la chambre ſera plus obſcure.

Mais on verra quelque choſe d'agréable, ſi après avoir mis à l'ouverture de la chambre obſcure un priſme triangulaire, on fait paſſer par un grand verre à facettes les différentes couleurs des rayons du ſoleil, produites par le priſme, & qu'on les reçoive ſur un papier blanc. On variera encore ces couleurs en leur préſentant des verres lenticulaires, & en les faiſant enſuite paſſer par un verre à facettes. On remarquera ſans aucune confuſion

dans le foyer du verre à facettes, les couleurs les plus belles & les plus brillantes qu'on puiſſe voir.

PROBLEME XXXVI.

Conſtruire un tableau magique.

Pl. 26, fig. 18. C'Eſt avec un verre à facettes qu'on fait voir une figure très-bien faite, quoiqu'elle ſoit tout-à-fait difforme ſur le tableau où elle eſt peinte. Pour conſtruire ces ſortes de tableaux, qu'on appelle *magiques*, on élevera à plomb ſur une table ABCD une autre table ou planche ADEF : on fera ſur ces deux tables des rainures, ſuivant leur longueur ; les rainures AB & CD de la table horiſontale ſerviront à éloigner ou avancer le pied BCH, & les rainures AF, DE de la planche verticale, ſerviront à hauſſer ou baiſſer un carton ſur lequel on collera un papier blanc. On ajuſtera au haut du pied BCH un tuyau KI dans un autre HI, le tuyau KI contiendra un verre à facettes ; placé en I, & un carton en K, auquel on aura fait un petit trou vers le foyer du verre à facettes.

Cela étant ainſi diſpoſé, on placera le pied BHC ſur la table horiſontale, dans un lieu convenable, & on l'éloignera plus ou moins de la planche verticale, ſelon qu'on voudra que les parties de la figure à deſſiner ſur le papier blanc du tambour, & qu'on veut raſſembler par le verre à facetes, ſoient plus ou moins éloignées les unes des autres. Au petit trou K on placera une lampe (ce ne doit point être une chandelle) qui renvoyera de la lumiere ſur le papier blanc appliqué à la planche verticale ADEF, & l'on marquera avec du crayon le contour de ces ſurfaces lumineuſes.

Quand on aura examiné, en regardant par le trou K, ſi ces ſurfaces lumineuſes paroiſſent faire une même ſuperficie, on prendra dans chacune de ces ſuperficies les parties d'un objet qui doivent ſe réunir toutes quand on les regardera par le verre à facettes, placé dans le tuyau KI. Et ſur les eſpaces qui ſont entre ces ſurfaces, on mettra telles figures groteſques qu'il plaira, pour faire paroître le tableau d'autant plus difforme. On peut auſſi prendre dans ces eſpaces des figures qui compoſeront une même figure, en les conſidérant à la vue, avec celles qui ſeront repréſentées ſur les ſurfaces lumineuſes.

Ainſi lorſqu'on regardera par le trou K, on ne remarquera qu'une ſeule figure ou image compoſée de toutes les parties qui ſont peintes ſur les ſurfaces lumineuſes, & l'on n'appercevra en aucune façon celles qui ſont peintes dans les eſpaces qui ſont au milieu. Voyez Wolfius dans ſa dioptrique, & Niceron dans ſa perſpective curieuſe.

PROBLEME XXXVII.

De la lanterne magique.

LA lanterne magique eſt une ſorte de lanterne qui contient une lampe miſe au foyer d'un verre convexe, ou d'un miroir concave, à laquelle on applique de petites figures peintes ſur des verres renfermés dans un chaſſis de bois, qu'on fait paſſer devant la lampe. Ces figures ſe repréſentent d'une grandeur énorme ſur une muraille ou un drap blanc, expoſé à une certaine diſtance dans une chambre entiérement obſcure. Pl. 27. fig. 19.

On ne s'étendra pas ici davantage ſur la deſcrip-

& demi, & un objectif convexe des deux côtés, ou d'un côté ſeulement & plan de l'autre, dont le diametre ſoit de douze pieds. Ce téleſcope ſera excellent pour obſerver les aſtres.

IV.

Les lunettes à deux verres convexes ſe feront de la même maniere; mais l'oculaire ſera placé au-deſſous du foyer de l'objectif. Comme les objets paroiſſent renverſés, on pourra corriger ce défaut en plaçant un miroir au-deſſus du foyer de l'oculaire, à peu près à l'endroit où l'on doit placer l'œil. Ce miroir ſera de métal bien poli, d'un pouce en ovale, & faiſant un angle demi-droit avec l'axe des verres: il faudra en approcher l'œil aſſez près pour voir diſtinctement les objets qui paroîtront dans leur ſituation naturelle. Quand on obſerve les aſtres, il n'eſt pas néceſſaire d'y ajouter un miroir, il importe peu en quelle ſituation ils paroiſſent: d'ailleurs on s'accoutume bientôt à diſtinguer leur partie orientale d'avec l'occidentale.

V.

On obſervera que dans ces ſortes de lunettes, le diametre de l'objectif doit être grand par rapport à celui de l'oculaire: car, par exemple, une lunette dont l'objectif eſt de vingt-cinq pieds, portera un oculaire de trois pouces, & celle dont l'objectif ſera de cinquante pieds, portera un oculaire qui n'aura que quatre pouces & demi de diametre. On peut faire une lunette d'une grandeur commode, avec un objectif de deux pieds trois pouces, & un oculaire d'un pouce & demi.

VI.

Il y a une différence à faire entre les objectifs convexes

convexes des deux côtés, & les objectifs convexes plans. Les objectifs convexes des deux côtés d'une même convexité ont leur foyer au centre de l'une des convexités, & les objectifs convexes plans ont leur foyer à l'extrêmité du diametre de la convexité. On mesure la longueur de ces lunettes par l'éloignement du foyer de leur objectif. Ainsi on dit qu'une lunette à douze pieds, si le demi-diametre de l'objectif convexe des deux côtés est de douze pieds, ou bien si le diametre de l'objectif plan convexe est de douze pieds.

VII.

Si l'on ajoute à la lunette qu'on vient de décrire, deux lentilles semblables à l'oculaire, on aura une lunette d'approche qui fera paroître les objets dans leur situation ordinaire, & qui sera meilleure que la lunette appellée communément *lunette de Galilée*. Ces deux lentilles ajoutées se placent auprès de l'oculaire dans un tuyau séparé, qu'on peut ôter quand on veut. Ainsi une lunette à deux verres peut devenir lunette à quatre verres, en ajoutant le tuyau qui contient les deux oculaires; & en ôtant ce même tuyau, une lunette à quatre verres deviendra facilement lunette à deux verres. Si la lunette à quatre verres a quelque avantage sur la lunette à deux verres, elle a aussi ce désavantage, qu'elle représente les objets moins clairement.

VIII.

Pour rendre l'objet vu par les lunettes, plus clair, on met sur l'objectif un carton percé au milieu; on fait plusieurs de ces cartons, dont les ouvertures sont de différente grandeur: on essaie

celui avec lequel on voit l'objet plus diſtinctement. Ce carton doit avoir ſon diametre égal à la largeur de l'objectif ; il faut auſſi le noircir, auſſi-bien que le dedans des tuyaux, pour empêcher les rayons de lumiere de ſe réfléchir.

IX.

On frottera le dedans des tuyaux d'un noir huilé, puis on y mettra du charbon broyé, & on les ſecouera ; enfin on les laiſſera ſéchet. On peut encore noircir ces tuyaux de lunettes avec la fumée d'une bougie de poix réſine.

Des microſcopes.

Les lunettes d'aproche nous font voir les objets que nous n'appercevons à la vue que confuſément, à cauſe de leur éloignement ; les microſcopes nous font voir diſtinctement les parties des corps que leur petiteſſe nous rend inſenſibles. On diſtingue en général deux ſortes de microſcopes ; le ſimple, qui eſt fait avec une ſeule lentille, & le compoſé, qui eſt fait de pluſieurs lentilles. Les microſcopes n'ont été connus que dans le ſiecle dernier vers l'an 1620.

On ne donnera ici la deſcription que de quelques microſcopes ſimples, qu'on peut faire ſoi-même pour ſe divertir : la dépenſe n'en ſera pas grande. Si on veut avoir d'autres microſcopes, ſoit ſimples, ſoit compoſés, on conſultera les auteurs qui en ont traité, comme Wolfius, Jobelot, & autres.

PROBLEME XXXIX.

Faire une lentille pour un microſcope ſimple.

IL faut prendre un morceau de glace de miroir ou de caroſſe, & le réduire en très-petits morceaux avec un greſſoir de vitrier; au défaut de cet inſtrument on ſe ſervira des dents d'une clef. On choiſira entre ces petits morceaux ceux qui ſeront les plus petits & les plus plats: on en prendra un avec la pointe d'une groſſe aiguille, qui doit être aſſez longue. On mettra ce petit morceau de glace dans la flamme d'une bougie, où il ſe fondra en peu de tems; lorſqu'il ſera fondu, il tombera de lui-même.

REMARQUE.

On mouillera la pointe de l'aiguille avec de la ſalive, pour y coller le petit morceau de glace, s'il ne s'y attache point autrement: on penchera un peu la bougie, afin que la lentille ne tombe point dans la cire, & pour la recevoir, il faut mettre au-deſſous un morceau de papier, dont les bords ſoient relevés; car s'ils ne l'étoient pas, les petites goutes en tombant ſauteroient & ſe perdroient: ſi ces petites goutes n'étoient pas aſſez rondes, on les reprendroit, & on les feroit refondre pour les arondir davantage. On prend une aiguille aſſez longue, afin de ne ſe point brûler, quand on la met dans la flamme de la bougie. On préférera la flamme bleue de la bougie, ou la flamme de l'eſprit de vin à la flamme de la bougie.

PROBLEME XL.

Faire un microſcope avec la lentille dont on vient de donner la conſtruction.

PRenez une petite plaque de plomb, que vous rendrez plus ou moins mince, à proportion de la petiteſſe de la lentille. Faites-y avec la pointe de l'aiguille un trou propre à recevoir la lentille que vous voulez y appliquer ; vous l'y arrêterez avec les bords du trou que vous releverez.

Uſage de ce microſcope.

Ayant laiſſé tremper pendant deux ou trois jours de l'écorce de chêne, des feuilles d'herbes ou de fleurs ſeches, ou autre choſe, dans de l'eau, on en prendra une goute avec un petit bâton ; on appliquera cette goute d'eau ſur la ſurface d'un côté de la lentille : on approchera le plus près qu'on pourra de l'œil l'autre côté de la lentille ; & en regardant à la lumiere d'une bougie, on verra une infinité de petits animaux qui ſont dans un mouvement continuel.

On peut appliquer ſur l'une des ſurfaces de la lentille, un cheveu, ou autre choſe, qu'on y attachera avec un peu de cire des deux côtés de la lentille.

PROBLEME XLI.

Faire un microſcope avec une goute d'eau.

AU lieu de la lentille, on mettra une goute de l'infuſion dans le trou de la plaque de plomb, dont on vient de parler dans le problême

précédent; on regardera à travers cette goute d'infusion à la lumiere d'une bougie, & l'on y appercevra les petits animaux, qui ne ceſſent de ſe mouvoir, juſqu'à ce que la goute ſoit deſſéchée, ou qu'elle ait perdu la figure ſphérique.

On peut ajuſter ce microſcope à l'extrêmité d'un tuyau de carton, afin que la lumiere du grand jour n'empêche point celle de la bougie. Il ſera aiſé à chacun de faire des réflexions ſur ce qu'on vient de dire, pour rendre ces microſcopes plus complets, ou pour en inventer d'autres.

Remarques ſur les microſcopes ſimples.

Les microſcopes ſimples augmentent le diametre de l'objet qu'on regarde, en raiſon de la diſtance du foyer à huit doigts, qui eſt la diſtance où l'on peut voir diſtinctement un petit objet, comme ſeroient les lettres d'une écriture aſſez menue. Ainſi ſi la diſtance du foyer d'un microſcope à ce microſcope eſt d'un demi-doigt, le diametre de l'objet poſé dans le foyer ſera augmenté de ſeize fois, c'eſt-à-dire, que ce diametre paroîtra ſeize fois plus grand. Plus la diſtance du foyer ſera petite, plus le diametre de l'objet ſera augmenté. D'où il ſuit que les microſcopes ſimples ſeront d'autant meilleurs, qu'ils ſeront faits des ſpheres plus petites.

En comparant une goute d'eau avec une goute de glace, dont on a fait les microſcopes dans les problêmes précédens, on trouve que la goute de glace augmente plus le diametre de l'objet, que la goute d'eau : car ſuppoſant que ces deux goutes ayent chacune $\frac{1}{10}$ de doigt pour leurs diametres, le diametre d'un même objet paroîtra augmenté d'environ 103 fois en le regardant à travers la goute

de glace, au lieu qu'il ne paroîtra augmenté que d'environ 80 fois en le regardant à travers la goute d'eau.

La géometrie nous apprend que la ſuperficie d'un quarré ou d'un cercle eſt en raiſon doublée du côté du quarré ou du diametre du cercle, & que le corps cubique ou ſphérique eſt en raiſon triplée du côté du cube ou du diametre de la ſphere. Ainſi la ſuperficie d'un corps, dont le diametre ſera augmenté de 100 fois paroîtra 10000 fois plus grande, & le corps même paroîtra 1000000 fois plus grand que s'il étoit vu ſans microſcope. Ce qui eſt une augmentation très-conſidérable.

C'eſt avec cette ſorte de microſcope qu'on remarque que la pouſſiere qui eſt ſur les papillons, eſt ſemblable à des plumes; que celle qui eſt ſur l'étamine des fleurs, paroît être une multitude de petites boules; que l'eau qui ſe trouve dans les moules, contient un grand nombre de petites moules; que la ſemence des animaux contient une grande quantité de petits animaux qui s'y remuent en tous ſens; que les cheveux ſont ronds & creux. Enfin on peut obſerver la figure des parties du ſang, du lait, &c.

Obſervation ſur les microſcopes compoſés.

Les microſcopes compoſés ont des avantages très-conſidérables. Les grains de ſable fort menus paroiſſent comme de petits criſtaux; les parties du corps d'une mouche s'y voyent très-diſtinctement; les particules d'acier qui tombent du fuſil quand on le bat pour allumer du feu, paroiſſent rondes & ſemblables au plomb des chaſſeurs. On remarque très-diſtinctement la circulation du ſang, principalement dans la queue d'un poiſſon appellé

zanche, &c. Voyez Poliniere dans ſes expériences phyſiques, p. 501 de la ſeconde édition.

De la perſpective curieuſe.

PROBLEME XLII.

Décrire ſur un plan une figure difforme, qui paroiſſe au naturel, étant regardée d'un point déterminé.

ON peut déguiſer, c'eſt-à-dire, rendre difforme une figure, par exemple, une tête, en ſorte qu'elle n'aura aucune proportion étant regardée de front ſur le plan où on l'aura tracée; mais étant vue d'un certain point, elle paroîtra belle, c'eſt à-dire, dans ſes juſtes proportions. Cela ſe pratiquera de la ſorte.

Ayant deſſiné ſur du papier la figure que vous voulez déguiſer avec ſes juſtes méſures, décrivez un quarré autour de cette figure, comme ABCD, & réduiſez-le en pluſieurs autres petits quarrés, diviſant les côtés en pluſieurs parties égales, par exemple, en ſept, & tirant des lignes droites en long & en travers par les points oppoſés des diviſions, comme font les peintres, quand ils veulent contre-tirer un tableau, & le réduire au petit pied, c'eſt-à-dire de grand en petit. Pl. 28, fig. 80.

Cette préparation étant faite, décrivez à diſcrétion ſur le plan propoſé le quarré long EBFG; & diviſez l'un des deux plus petits côtés EG, BF, comme EG, en autant de parties égales qu'en contient DC, l'un des côtés du quarré ABCD; comme ici en ſept. Diviſez l'autre côté BF en deux également au point H, duquel vous tirerez par les points de diviſion du côté oppoſé EG au-

tant de lignes droites, dont les deux dernieres ſeront EH, GH.

Après cela ayant pris à diſcrétion ſur le côté BF le point I, au-deſſus du point H, pour la hauteur de l'œil au-deſſus du plan du tableau, tirez de ce point I au point E, la ligne droite EI, qui coupe ici celles qui partent du point H, aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Par ces points d'interſection vous tirerez des lignes droites paralleles entre elles, & à la baſe EG du triangle EHG, qui ſe trouvera ainſi diviſé en autant de trapeſes qu'il y a de quarrés dans le quarré ABCD. C'eſt pourquoi ſi l'on rapporte dans ce triangle EGH, la figure qui eſt dans le quarré ABCD, en faiſant paſſer chaque trait par les mêmes trapeſes ou quarrés perſpectifs, qui ſont repréſentés par les quarrés naturels du grand ABCD, la figure difforme ſe trouvera décrite. On la verra conforme à ſon prototype, c'eſt-à-dire, comme dans le quarré ABCD, en la regardant par un trou qui doit être petit du côté de l'œil, & bien évaſé du côté de la figure, comme K, que je ſuppoſe perpendiculairement élevé ſur le point H, en ſorte que ſa hauteur LK ſoit égale à la hauteur HI, qui ne doit pas être bien grande, afin que la figure ſoit plus difforme dans le tableau. Voyez le problême XLIV.

PROBLEME XLIII.

Décrire ſur un plan une figure difforme, qui paroiſſe dans ſa perfection, étant vue par réflexion dans un miroir plan.

Pl. 28, fig. 81. AYant, comme on vient de faire, compris la figure qu'on veut déguiſer dans un quarré,

tel qu'eſt ABCD, diviſé en pluſieurs autres petits quarrés, qui ſont ici au nombre de ſeize; & ſuppoſant que le miroir eſt une glace parfaitement quarrée, toute nue & ſans quadre, comme EFGH, tirez ſur le plan du tableau la ligne droite IK, égale au côté EF du miroir, afin que la figure occupe entierement le miroir EFGH. Enſuite ayant diviſé en deux également au point P cette ligne IK, menez par le point du milieu P la perpendiculaire indéfinie LM, enſorte que les deux parties PL, PM, ſoient égales entre elles, & d'une longueur priſe à volonté. Pl. 28. fig. 82.

Après cela élevez au point L, la ligne LQ perpendiculaire à la ligne LM, & égale au double de la ligne IK, ou du côté du miroir EF, & au point M, la ligne NO perpendiculaire à la même ligne LM, que vous prendrez auſſi double de la ligne IK, en ſorte que chacune des deux parties MN, MO, ſoit égale à la ligne IK. Joignez les droites LN, LO, qui paſſeront par les points I, K, & formeront le triangle LNO que l'on diviſera, comme au problême précédent, en autant de quarrés perſpectifs que le quarré ABCD en contient de naturels, pour y tranſporter de la même façon la figure du quarré ABCD, qui ſe trouvera difforme ſur le plan du tableau, & qui paroîtra belle & ſemblable à ſon prototype, étant vue du point Q élevé perpendiculairement ſur le point L, comme nous avons dit au problême précédent: ou bien on la verra en ſon naturel par réflexion dans le miroir EFGH, placé ſur la ligne IK, en regardant le miroir par un petit trou élevé perpendiculairement ſur le point M, à la hauteur de LQ, comme vous le voyez dans la fig. 82, où IRSK repréſente le miroir, & Q le point de l'œil, &c.

PROBLEME XLIV.

Décrire ſur un plan horiſontal une figure difforme, qui paroiſſe au naturel, ſur un plan vertical, tranſparent, poſé entre l'œil & la figure difforme.

Pl. 29, fig. 83. IL eſt évident que ſi l'on met en perſpective quelque figure que ce ſoit ſur du papier, conſidéré comme un plan horiſontal, & que ſur la ligne de terre on éleve à angles droits un plan tranſparent, qui ſoit, par exemple, de verre; l'œil étant placé vis-à vis du point de vue, à une hauteur égale à la diſtance de la ligne de terre à la ligne horiſontale, & éloigné du plan tranſparent, qui repréſente le tableau d'une diſtance égale à celle qu'on a ſuppoſée dans la perſpective, on verra dans le verre la figure difforme dans ſon naturel. Ceux qui entendent la perſpective, comprennent facilement ce que je viens de dire, & ceux qui ne l'entendent pas pourront réſoudre ce problême mécaniquement en cette ſorte.

Ayant décrit ſur une piece de carton ABCD, la figure que vous voulez déguiſer, avec ſes juſtes proportions: par exemple, l'œil EF, piquez cette figure EF, comme ſi vous vouliez faire un poncis: & ayant élevé à angles droits ce carton ainſi piqué ſur le plan MNOP, où vous voulez décrire la figure difforme, mettez derriere le carton ABCD, une bougie allumée à telle hauteur & à telle diſtance qu'il vous plaira, comme en G. Alors la lumiere paſſant par les trous du carton ABCD, portera la figure ſur le plan MNOP, & l'y repréſentera toute défigurée, comme HIKL,

que l'on marquera avec un crayon, ou autrement. Cette image ainſi défigurée paroîtra en ſon naturel ſur un verre mis à la place du carton ABCD, étant regardée par l'œil placé au point G. Elle paroîtra auſſi ſemblable à ſon prototype EF, étant vue ſimplement par un petit trou mis au point G, comme au problême XLII.

PROBLEME XLV.

Décrire ſur la ſurface convexe d'une ſphere une figure difforme, qui paroiſſe au naturel étant regardée d'un point déterminé.

AYant deſſiné ſur du papier la figure que vous voulez déguiſer, avec ſes juſtes proportions, enfermez-la dans un cercle ABCD, dont le diametre AC, ou BD, ſoit égal au diametre de la ſphere propoſée. Diviſez la circonférence de ce cercle en autant de parties égales qu'il vous plaira, par exemple, en ſeize. Tirez du centre de ce cercle par les points de diviſion, autant de lignes droites. Diviſez auſſi le diametre AC, ou BD de ce cercle en un certain nombre de parties égales, comme en huit, & décrivez du même centre par les points de diviſion des circonférences de cercles, leſquelles avec les lignes droites tirées du centre, diviſeront le cercle ABCD en 64 petits eſpaces. Pl. 30, fig. 84.

Décrivez encore un autre cercle EFGH égal au précédent ABCD, & menez de ſon centre I la ligne droite IK, égale à la diſtance de l'œil au centre de la ſphere propoſée, en ſorte que la partie GK ſoit égale à la hauteur de l'œil ſur la ſurface de la même ſphere. Enſuite ayant mené par le même centre I, le diametre FH perpendiculaire à

Pl. 30, fig. 30. la ligne IK, diviſez ce diametre FH en autant de parties égales, que le diametre du premier cercle ABCD, ſçavoir, en huit parties égales. Puis tirez du point K, par les points de diviſion autant de lignes droites, qui donneront ſur le demi-cercle FGH, les points 1, 2, 3, 4, & ſur l'autre demi-cercle FEH, les points 5, 6, 7.

Cette préparation étant faite, décrivez ſur la ſurface convexe du globe propoſé MLO du point L, comme pole, & des intervalles G1, G2, G3, G4, GF, des cercles paralleles entre eux, dont le plus grand ſera MNO, duquel on ne voit ici que la moitié, qu'il faut diviſer en autant de parties égales que la moitié du cercle ABCD, comme ici en huit parties égales. Décrivez par les points de diviſion & par le pole L, autant de grands cercles, qui avec les précédens diviſeront l'hémiſphere LMNO en autant de petits eſpaces que le cercle ABCD, dans leſquels on tranſportera l'image du cercle ABCD. Cette image, ou figure, qui ſera défigurée dans l'hémiſphere LMNO, paroîtra néanmoins ſemblable à ſon prototype, qui ſe trouve dans ce cercle ABCD, étant regardée d'un point élevé perpendiculairement ſur le point L, & éloigné de ce point L d'une diſtance égale à la ligne GK.

REMARQUE.

Ce que nous avons fait ſur la ſurface convexe d'une ſphere, ſe peut faire de la même façon ſur la ſurface concave de la même ſphere, excepté que les cercles paralleles qui ont été décrits du pole L, avec les ouvertures G1, G2, G3, &c. doivent être décrits avec les ouvertures E5, E6, E7, EF, c'eſt-à-dire, qu'au lieu de ſe ſervir du demi-cercle

FGH, que l'œil placé au point K voit par ſa convexité, on doit ſe ſervir de l'autre demi-cercle FEH, que l'œil placé au même point K, voit par ſa concavité.

PROBLEME XLVI.

Décrire ſur la ſurface convexe d'un cylindre une figure difforme, qui paroiſſe belle quand elle ſera vue d'un point déterminé.

AYant, comme à l'ordinaire, renfermé la figure qu'on veut déguiſer en un quarré KLMN, diviſé en pluſieurs autres petits quarrés, & ayant déterminé le point de l'œil en O, à une diſtance raiſonnable du cylindre propoſé ABCD, dont la baſe eſt le cercle AFBG, tirez du centre E de cette baſe par le point déterminé O, la ligne droite EO; menez perpendiculairement à cette ligne EQ, par le même centre E, le diametre AB, que vous diviſerez en autant de parties égales qu'en contient le côté KL du quarré KLMN. Tirez du point O, par les points de diviſion autant de lignes droites, qui donneront ſur la circonférence du demi-cercle AFB, que l'œil voit, les points 1, 2, 3, 4, & ſur la circonférence de l'autre demi-cercle AGB, que l'œil ne voit pas, les points 5, 6, 7. Pl. 30, fig. 85.

Après cela tirez par les points 1, 2, 3, 4, ſur la ſurface du cylindre des lignes paralleles entre elles & à l'axe du même cylindre, ou au côté AD, ou BC. Puis ayant diviſé une de ces paralleles en autant de parties égales qu'en contient le diametre AB, decrivez ſur la ſurface du même cylindre par les points de diviſion des circonfé-

rences de cercle paralleles à la circonférence AFBG, leſquelles, avec les lignes droites paralleles précédentes, formeront de petits eſpaces, dans leſquels on tranſportera la figure du quarré KLMN. Cette image, qui ſe trouvera défigurée ſur la ſurface du cylindre ABCD, paroîtra néanmoins conforme à ſon prototype, étant regardée par un petit trou placé au point O, où l'œil a été ſuppoſé dans la conſtruction.

REMARQUE.

Ce que nous venons de faire ſur la ſurface convexe du cylindre ABCD, ſe peut faire de la même façon dans ſa ſurface concave, en ſe ſervant du demi-cercle AGB, comme nous avons fait du demi-cercle AFB, c'eſt-à-dire, en élevant des perpendiculaires des points 5, 6, 7, dans la ſurface concave, comme nous avons fait des points 1, 2, 3, 4, dans la ſurface convexe, &c.

PROBLEME XLVII.

Décrire ſur la ſurface convexe d'un cone une figure difforme, qui paroiſſe en ſon naturel, étant regardée d'un point déterminé.

Pl. 31, fig. 86. DEcrivez autour de la figure que vous voulez déguiſer, un cercle à volonté, comme ABCD, & diviſez ſa circonférence en autant de parties égales qu'il vous plaira, comme en huit. Tirez par les points de diviſion A, E, B, F, &c, au centre O, autant de demi-diametres. L'un de ces demi-diametres, comme AO, étant diviſé, par exemple, en trois parties égales aux points 7, 8,

vous décrirez du centre O, par ces points de divi- Pl. 31.
ſion, 7, 8, autant de circonférences de cercles, fig. 26.
qui, avec les demi diametres précédens, diviſeront l'eſpace terminé par la premiere & plus grande circonférence ABCD en 24 petits eſpaces, qui ſerviront à contre-tirer l'image qui y ſera compriſe, & à la défigurer ſur la ſurface convexe d'un cone, quand cette ſurface aura été diviſée en autant de ſemblables petits eſpaces, en cette ſorte.

Ayant tiré à part la ligne IK égale au diametre de la baſe du cone propoſé, & l'ayant diviſé en deux également au point L, élevez en ce point L la perpendiculaire LM égale à la hauteur du cone. Joignez les droites MI, MK, qui repréſenteront les côtés de ce cone, que je ſuppoſe droit, comme ſi ce cone avoit été coupé par un plan tiré par ſon axe, de ſorte que le triangle iſoſcele IKM repréſentera le triangle de l'axe.

Cela étant fait, prolongez la perpendiculaire LM en N, autant au-deſſus du point M, qui repréſente la pointe du cone, que vous voudrez que l'œil ſoit élevé au-deſſus de cette pointe; en ſorte que la ligne MN ſoit égale à la diſtance de l'œil au ſommet du cone. Ayant diviſé la moitié IL de la baſe IK en autant de parties égales que le demi-diametre AO du prototype, tirez du point N, par les points de diviſion 1, 2, les droites N1, N2, qui donneront ſur le côté IM les points 4, 3. Enfin décrivez de la pointe du cone & des intervales M3, M4, des circonférences de cercle ſur la convexité du cone, qui repréſenteront les circonférences du prototype ABCD. Puis ayant diviſé la circonférence de la baſe du cone en autant de parties égales qu'en contient la circonférence ABCD, tirez de la pointe du centre par les

points de diviſion autant de lignes droites, qui, avec les circonférences précédentes, diviſeront la ſurface convexe du cone en 24 eſpaces difformes, qui repréſenteront ceux du prototype ABCD, & dans leſquels par conſéquent on tranſportera la figure de ce prototype, qui ſe trouvera difforme ſur la ſurface du cone, & qui étant regardé de l'œil mis directement au-deſſus de la pointe du cone à la diſtance MN, paroîtra comme une ſurface plane & conforme à ſon prototype.

REMARQUE.

Pl. 31, fig. 87. Ce que nous venons de faire ſur la ſurface convexe d'un cone poſé ſur ſa baſe, peut ſe pratiquer de la même façon ſur la ſurface concave d'un cone creux, poſé ſur ſa pointe, excepté qu'il faut prolonger la perpendiculaire LM au-delà du point L en N; de ſorte que la ligne MN ſoit égale à la diſtance de l'œil à la pointe du cone, qui dans ce cas lui doit ſervir de baſe, afin que l'œil placé en N, le puiſſe voir par le dedans, &c.

PROBLEME XLVIII.

Décrire ſur un plan horiſontal une figure difforme, qui paroiſſe belle ſur la ſurface convexe d'un miroir cylindrique droit, étant vue par réflexion d'un point donné.

Fig. 88. IL faut premierement enfermer dans un quarré, comme ABCD, la figure qu'on veut déguiſer, & diviſer ce quarré ABCD en ſeize autres petits quarrés, qui ſerviront à tranſporter la figure du prototype ſur les quarrés ſemblables difformes qu'on

qu'on aura décrits ſur la ſurface placée au pied du miroir cylindrique, dont la baſe eſt le cercle FGHI, qui a le point E pour centre. Ce qui ſe fera en cette ſorte. Pl. 31, fig. 88.

Si K eſt l'aſſiete de l'œil, c'eſt-à-dire, le point qui répond ſur le plan horiſontal perpendiculairement à l'œil qui peut être éloigné du cylindre d'un ou de deux pieds, & un peu plus haut que le cylindre, afin qu'il puiſſe voir par réflexion plus de parties du plan horiſontal; tirez par ce point K & par le centre E, la droite KE. Diviſez KE en deux parties égales au point L. De ce point L & pour rayon LE, décrivez l'arc de cercle FEH, qui donnera ſur la circonférence FGHI, les deux points F, H. Par le point K, & par les points F, H, vous tirerez les droites KFS, KHT, qui toucheront cette circonférence aux mêmes points F, H.

Aprés cela diviſez chacun des deux arcs égaux EF, EH, en deux également aux points M, N; & tirez du point K par les points M, N, les droites KM, KN, qui donneront ſur la circonférence FIH, les deux points O, P. Par ces points G, P, vous tirerez les deux lignes OQ, PR, en ſorte que l'angle de réflexion FOQ ſoit égal à l'angle d'incidence PGK, en prenant la ligne KO pour un rayon d'incidence, & que pareillement l'angle de réflexion HPR ſoit égal à l'angle d'incidence OPK, en prenant la ligne KP pour un rayon d'incidence. Alors les cinq lignes IK, OQ, PR, FS, HT, repréſenteront les lignes du prototype, qui ſont paralleles aux deux côtés AD, BC, que les deux touchantes ES, HT, repréſentent. Il ne reſte plus qu'à diviſer ces lignes en quatre parties égales en repréſentation; ce que je

Pl. 31, fig. 88. ferai de la maniere qui ſuit, pour avoir plutôt fait ſans que l'erreur puiſſe être conſidérable.

Ayant mené par le point 1, où la ligne KE coupe la circonférence FIH, la ligne 1, 2, perpendiculaire à la même ligne KE, qui ſera terminée aux points 1, 2, par les deux touchantes KF, KH, tirez du centre E par le point H la droite H o, que vous ferez égale à la ligne 1, 2, & diviſez-la en quatre parties égales aux points 7, 8, 9. Tirez enſuite par le point K, la droite KX, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallele à la ligne H o, ou perpendiculaire à la touchante KH. Ayant appliqué une regle bien droite au point X, & aux points de diviſion 7, 8, 9, 0, marquez des points ſur la ligne HT, dans les endroits où elle ſe trouvera coupée ſucceſſivement par la regle. La ligne HT ſe trouvera diviſée aux points 7, 8, 9, T, en parties égales en apparence à celle de la ligne 1, 2, qui eſt diviſée par les lignes tirées du point K, en quatre parties qui ſont preſque égales entre elles. Enfin portez les diviſions de la touchante HT ſur l'autre touchante FS.

Pour diviſer la ligne PR en quatre parties égales en repréſentation à celles de la ligne 1, 2, tirez par le point P, la ligne P6, que vous ferez perpendiculaire à la ligne KP, & égale à la ligne 1, 2. Diviſez cette perpendiculaire P6 en quatre parties égales aux points 3, 4, 5. Tirez pareillement par le point K, la ligne KV, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallele à la ligne P6, ou perpendiculaire à KP. Ayant comme auparavant appliqué une regle au point V, & aux points de diviſion 3, 4, 5, 6, marquez ſur la ligne KP prolongée les points 3, 4, 5, 6,

dans les endroits où elle ſera coupée par la regle. Enfin portez les diviſions de la ligne PN ſur chacune des deux lignes PR, OQ, & faites paſſer par les points également éloignés de la circonférence FCHI, qui ont été marqués ſur les quatre lignes FS, OQ, PR, HT, quatre circonférences de cercles, qui avec les lignes droites FS, OQ, IK, PR, HT, formeront ſeize quarrés difformes, dans leſquels on tranſportera la figure du prototype ABCD, qui ſe trouvera défigurée ſur le plan horiſontal, & qui paroîtra dans ſa perfection ſur la ſurface convexe du miroir cylindrique, poſé droit ſur la baſe FGHI, quand elle ſera vue par réflexion de l'œil élevé perpendiculairement ſur le point K à une hauteur égale à la ligne KV ou KX. Voyez la remarque du problême ſuivant. Pl. 31, fig. 88.

PROBLEME XLIX.

Décrire ſur un plan horiſontal une figure difforme qui paroiſſe belle ſur la ſurface convexe d'un miroir conique élevé à angles droits ſur ce plan, étant vue par réflexion d'un point donné dans l'axe prolongé de ce cone.

DEcrivez autour de la figure que vous voulez déguiſer, le cercle ABCD d'une grandeur priſe à volonté, & diviſez ſa circonférence en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira. Tirez du centre E par les points de diviſion autant de demi-diametres, dont l'un, comme AE, ou DE, doit auſſi être diviſé en un certain nombre de parties égales. Décrivez du centre E par les points de diviſion autant de circonférences de cercle, qui Pl. 32. fig. 89.

Pl. 32, fig. 89. avec les demi-diametres précédens, diviſeront l'eſpace terminé par la premiere & plus grande circonférence ABCD, en pluſieurs petits eſpaces, qui ſerviront à entretenir la figure qui y ſera compriſe, & à la défigurer ſur le plan horiſontal autour de la baſe FGHI du miroir conique en cette ſorte.

Ayant pris le cercle FGHI, dont le centre eſt O, pour la baſe du cone, faites à part le triangle rectangle KLM, dont la baſe KL ſoit priſe égale au demi-diametre OG de la baſe du cone, & la hauteur KM égale à la hauteur du même cone. Prolongez cette hauteur KM en N, de ſorte que la partie MN ſoit égale à la diſtance de l'œil à la pointe du cone, ou toute la ligne KN égale à la hauteur de l'œil au-deſſus de la baſe du cone. Ayant diviſé la baſe KL en autant de parties égales qu'en contient le demi-diametre AE, ou DE, du prototype, tirez du point N, par les points de diviſions P, Q, R, autant de lignes droites, qui donneront ſur l'hypoténuſe LM, qui repréſente le côté du cone, les points S, T, V. Faites au point V l'angle LV1 égal à l'angle LVR, au point T l'angle LT2 égal à l'angle LTQ, au point S l'angle LS3 égal à l'angle LSP, & au point M, qui repréſente le ſommet du cone, l'angle LM4 égal à l'angle LMK, pour avoir ſur la baſe KL prolongée les points 1, 2, 3, 4.

Enfin décrivez du centre O de la baſe FGHI du miroir conique, & des intervalles K1, K2, K3, K4, des circonférences de cercles, qui repréſenteront celles du prototype ABCD, & dont la plus grande doit être diviſée en autant de parties égales que la circonférence ABCD. Puis tirez du centre O, par les points de diviſion, des demi-diametres

qui donneront ſur le plan horiſontal autant de petits eſpaces difformes que dans le prototype ABCD, dans leſquels par conſéquent on pourra tranſporter la figure de prototype. Cette image ſe trouvera extrêmement défigurée ſur le plan horiſontal, & paroîtra néanmoins par réflexion dans ſes juſtes proportions ſur la ſurface du miroir conique poſé ſur le cercle FGHI, quand l'œil ſera mis perpendiculairement au-deſſus du centre O, & éloigné de ce centre O d'une diſtance égale à la ligne KN.

REMARQUE.

Pour ne vous pas tromper en tranſportant ce qui eſt dans le prototype ABCD, ſur le plan horiſontal, on prendra garde que ce qui eſt le plus éloigné du centre E, doit être le plus proche de la baſe FGHI du miroir conique, comme vous voyez par les mêmes lettres, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, du plan horiſontal & du prototype. On obſervera la même choſe à l'égard d'un miroir cylindrique, comme vous voyez auſſi par les quatre lettres ſemblables *a*, *b*, *c*, *d*, du plan horiſontal & du prototype. Pl. 32, fig. 88.

PROBLEME L.

Décrire une lanterne artificielle, par le moyen de laquelle on puiſſe lire la nuit de fort loin.

FAites une lanterne qui ait la forme d'un cylindre, ou d'un petit tonneau ſitué ſelon ſa longueur, comme un tonneau de vin poſé dans une cave, en ſorte que la fumée paſſe par le bondon. Mettez à l'un de ſes deux fonds un miroir

concave parabolique. Appliquez à ſon foyer la flamme d'une bougie, dont la lumiere ſe réfléchira fort loin en paſſant par l'autre fond qui doit être ouvert, & elle paroîtra ſi éclatante, que la nuit on pourra lire de fort loin des lettres très-petites, lorſqu'on les regardera avec des lunettes de longue vue. Ceux qui verront de loin la lumiere de cette bougie, croiront voir un grand feu, qui paroîtroit encore plus éclatant, ſi la lanterne, étant étamée par le dedans, avoit la figure d'une ellipſe.

REMARQUE.

On ſe ſert auſſi d'un ſemblable miroir pour la *lanterne magique*, ainſi appellée, parce que par ſon moyen l'on fait voir ſur une muraille blanche de quelque chambre obſcure tout ce que l'on veut. De ſorte qu'on peut faire paroître des monſtres & des ſpectres ſi affreux que celui qui les voit ſans en connoître le ſecret, croit que cela ſe fait par magie. La lumiere qui ſe réfléchit par le moyen de ce miroir, paſſe par un trou de la lanterne, où il y a un verre de lunette. On fait paſſer entre ce verre & la lumiere une piece de bois plate & déliée, contenant pluſieurs petits verres peints de diverſes figures extraordinaires & affreuſes, que l'on fait couler ſucceſſivement par une fente qui eſt dans le corps de la lanterne. Ces petites figures ſe repréſentent ſur la muraille oppoſée avec leurs mêmes couleurs & proportions en plus grand volume: ce qui donne de la terreur, & cauſe de l'admiration aux ſpectateurs qui n'en connoiſſent pas l'artifice. Voyez les problêmes de phyſique.

PROBLEME LI.

Par le moyen de deux miroirs plans faire paroître un viſage ſous des formes différentes.

AYant placé horiſontalement l'un des deux miroirs plans, élevez l'autre à peu près à angles droits au-deſſus du premier, les deux miroirs demeurant dans cette ſituation, ſi vous vous approchez du miroir perpendiculaire, vous y verrez votre viſage tout à fait difforme & imparfait, car il paroîtra ſans front, ſans yeux, ſans nez & ſans oreilles, vous ne verrez que la bouche & le menton fort élevés. Si vous inclinez tant ſoit peu le miroir perpendiculaire, votre viſage y paroîtra avec toutes ſes parties, excepté les yeux & le front. Si vous l'inclinez un peu plus, vous y verrez deux nez & quatre yeux, & en l'inclinant encore un peu davantage, vous y verrez trois nez & ſix yeux. Si vous continuez à l'incliner un peu davantage, vous ne verrez plus que deux nez, deux bouches & deux mentons; & en l'inclinant encore un peu plus, vous y verrez ſeulement un nez & une bouche : & votre viſage ceſſera de paroître entierement dans ce miroir, ſi vous l'inclinez encore un peu plus, ce qui arrivera lorſque l'angle d'inclinaiſon ſera d'environ 45 degrés.

Si vous inclinez les deux miroirs l'un à l'autre, vous y pourrez voir votre viſage tout entier, & par les différentes inclinaiſons, vous verrez dans le même miroir l'image de votre viſage alternativement droite & renverſée, &c.

REMARQUE.

Si on mêle avec la matiere du miroir, lorſqu'elle

eſt encore dans la fournaiſe, un peu de maſſicot, de ſafran, ou quelqu'autre couleur jaune, celui qui s'y mirera paroîtra avoir la jauniſſe. Si on y mêle du noir en petite quantité, il paroîtra avoir la face livide & comme plombée : ſi on en mêle en plus grande quantité, il ſemblera avoir le viſage d'un Ethiopien. Si on y jette de la lacque, du cinabre ou vermillon, celui qui s'y regardera, ſera étonné de ſe voir tout rouge & comme enflammé de colere, ou enluminé comme un yvrogne. En un mot, on paroîtra avoir autant de couleurs différentes qu'on en aura mêlé dans la matiere dont on aura fait les miroirs où l'on ſe regardera.

PROBLEME LII.

Faire voir un jetton qui ſeroit caché à l'œil dans le fond d'un vaſe vuide.

Pl 27, fig. 10. ON a mis un jetton C au fond d'un vaſe vuide AB. On s'eſt éloigné du vaſe, juſqu'à ce que l'extrêmité E du bord de ce vaſe ait caché ce jetton à l'œil placé en D. On propoſe de faire enſorte que l'œil apperçoive le jetton, ſans changer la ſituation de l'un ni de l'autre. Faites remplir d'eau le vaſe : auſſi-tôt l'œil appercevra le jetton, comme s'il étoit un peu élevé vers F.

On a déja dit que les rayons de lumiere ſe rompoient en s'écartant de la perpendiculaire, lorſqu'ils paſſoient d'un milieu tranſparent dans un autre milieu rranſparent plus fluide. Le vaſe étant vuide, on ne pouvoit appercevoir le jetton, parce que le bord du vaſe empêchoit les rayons de lumiere d'être réfléchis du jetton à l'œil. Mais ſi

vaſe ayant été rempli d'eau, un rayon de lumiere, par exemple, CE, ſortant de l'eau, au lieu de continuer juſqu'en G par la droite EG, ſe détourne & va frapper l'œil par la ligne ED, qui s'écarte de la perpendiculaire EH.

Ce jetton paroît un peu élevé vers F, à cauſe qu'on croit le voir par la ligne droite DF, qui eſt égale aux deux lignes AE & EC.

On explique par ce principe pourquoi un bâton mis obliquement dans l'eau, paroît rompu.

PROBLEME LIII.

Repréſenter une iris ſur le plancher d'une chambre obſcure.

IL faut ſe ſervir d'un priſme triangulaire, que les artiſans appellent ſimplement triangle, qui étant appliqué ſur la racine du nez, fait paroître les objets avec des couleurs ſemblables à celle de l'iris, ou arc-en-ciel. Mettez ce priſme à une fenêtre de la chambre où le ſoleil donne, les rayons du ſoleil en paſſant au travers de ce verre triangulaire, formeront ſur le plancher de la chambre une iris, qui ſera très-agréable à voir, principalement ſi le plancher eſt fait en voûte, parce que cela donnera à l'iris une figure ronde & ſemblable à celle de l'iris que nous voyons dans les nuées.

REMARQUES.

Ce priſme triangulaire nous donne occaſion de rapporter ici ce que M. de Mairan a dit dans ſa diſſertation ſur les phoſphores & les noctiluques, touchant les rayons de lumiere qui paſſent

au travers d'un priſme triangulaire. Voici de quelle maniere il s'exprime.

« On prouve par des expériences déciſives,

» Que la lumiere contient en elle-même toutes » les couleurs indépendamment des configurations » intérieures ou extérieures des corps au travers » deſquels elle paſſe, ou ſur leſquels elle ſe réfléchit; c'eſt-à-dire, qu'un rayon ſenſible du ſoleil, » par exemple, eſt compoſé de particules de différente eſpece, dont chacune a la propriété d'exciter dans l'ame, par le moyen de l'organe de la » vue, le ſentiment de couleur particuliere de cette » eſpece, ſans qu'aucune réflexion, ni qu'aucune » réfraction puiſſe jamais la changer.

» Que le blanc n'eſt pas proprement une couleur » mais un compoſé de toutes les couleurs, & que » le noir au contraire n'eſt que la négation de toutes les couleurs.

» Que chaque couleur des corps ne conſiſte dans » la figure & dans l'arrangement particulier des » parties qui le compoſent, qu'en tant qu'ils ſont » par-là plus propres à rompre & à abſorber dans » leurs pores la lumiere d'une certaine couleur, & » à réfléchir celles d'une autre couleur. Ainſi le » carmin, par exemple, eſt fort rouge, parce qu'il » ne réfléchit que la lumiere rouge, & que toutes » les autres eſpeces de lumiere ſe rompent & ſe » perdent dans ſes pores ſans ſe réfléchir.

» Enfin que chaque eſpece de lumiere a ſa réfraction déterminée, c'eſt-à-dire, que chaque couleur, en paſſant obliquement d'un milieu dans un » autre, de l'air, par exemple, dans le criſtal, ſe » rompt à ſa rencontre par un angle particulier, » différent de celui des autres couleurs. C'eſt ce » que M. Newton, auteur de cette découverte,

» appelle la *différente réfrangibilité des couleurs de* » *la lumiere*. C'eſt principalement par cette pro- » priété qu'il a reconnu toutes les autres, & les » ingénieuſes expériences, dont il s'eſt ſervi pour » s'en aſſurer, pourroient toutes ſeules immortali- » ſer un nom moins célebre que le ſien. Voici la » plus facile, qui ſuffira néanmoins pour mettre » les perſonnes qui n'ont pas vu l'optique de M. » Newton, au fait de ce que j'ai à dire ſur cette « matiere ».

» Faites entrer un rayon de ſoleil dans une cham- » bre obſcure, par un petit trou rond de 3 ou 4 li- » gnes de diametre : placez horiſontalement auprès » de ce trou un priſme triangulaire de verre, dans » une telle ſituation que le rayon du ſoleil ſoit à » peu près perpendiculaire à l'axe de ce priſme, & » qu'il entre par une de ſes ſurfaces, & ſorte par » l'autre, de maniere que le tranchant formé par » ces deux ſurfaces, regarde en bas. Ce rayon, » après avoir traverſé le priſme, entrera dans la » chambre, en s'étendant de bas en haut, & s'ira » peindre ſur le mur oppoſé. Il eſt encore mieux de » le recevoir ſur un carton bien blanc, à ſept ou » huit pas de la fenêtre, & il y formera une bande » verticale d'un pied de longueur, par exemple, & » de deux ou trois pouces de largeur. Cette bande » contiendra ſéparément les cinq couleurs primiti- » ves, rouge, jaune, verd, bleu & violet, qui la » diviſeront en cinq eſpaces un peu inégaux, en » commençant par le bas dans l'ordre précédent, » rouge, &c. Les nuances, ou les couleurs ſecon- » des, ſe trouveront entre les couleurs primitives » dont elles participent; ſçavoir, entre le rouge & le » jaune, la couleur d'or foncé; entre le bleu azuré » & le violet, le bleu turquin, & ainſi des

» autres. Si l'on fait paſſer au travers d'un autre » priſme, à quatre ou cinq pas du premier, une » ſeule de ces couleurs ſéparées, qui compoſoient » le rayon, elle ne changera point du tout en s'y » rompant, parce qu'elle ne contient qu'une lu- » miere homogene; mais ſi on les ramaſſe toutes » par le moyen de quelque verre convexe, elles » ſe confondront, & il ſe formera de leur confuſion » un nouveau rayon de lumiere blanc tirant ſur le » jaune, & tel qu'il étoit en partant du ſoleil, ou » avant que d'avoir traverſé ce premier priſme. » On peut varier cette expérience de mille manie- » res, & à force de filtrer, ſi je l'oſe dire, & de » tamiſer ainſi la lumiere, ſe convaincre parfaite- » ment qu'elle a toutes les propriétés dont j'ai fait » mention. Il faut obſerver ſur-tout que le diffé- » rent degré de réfrangibilité de ſes couleurs, » lorſqu'elle paſſe au travers d'un priſme, eſt l'uni- » que cauſe de leur ſéparation, & qu'ainſi le vio- » let, par exemple, eſt plus réfrangible que le » rouge de la quantité d'un angle, dont le ſinus eſt » proportionnel à la diſtance qu'il y a du rouge au » violet dans la bande verticale ».

Fin du premier tome.

TABLE
DES PROBLÊMES.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

PROBLEME I. *Des religieuſes ſont retirées en huit cellules, tellement diſpoſées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du dortoir bâti en quarré, & chacune des quatre autres eſt au milieu de chaque côté. L'abbeſſe, qu'on ſuppoſe aveugle, fait ſa viſite : elle compte le nombre des religieuſes qui ſont dans les trois cellules d'un rang ; elle trouve que le nombre des religieuſes d'un rang eſt égal à celui de chaque autre rang, en prenant pour un rang deux cellules des coins & celle du milieu. Cette abbeſſe fait une ſeconde viſite, & compte dans chaque rang le même nombre de perſonnes que dans la premiere viſite, quoiqu'il y ſoit entré quatre hommes. Enfin dans la troiſieme viſite qu'elle fait, elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de perſonnes qu'auparavant, quoique les quatre hommes ſoient ſortis, & qu'ils ayent emmené chacun une religieuſe,* p. 1

PROBL. II. *On a mené ſur le bord d'une riviere un loup, une chevre & un chou. On propoſe à un batelier de les paſſer ſeul à ſeul, de maniere qu'en ſon abſence le loup ne faſſe aucun mal à la chevre, & que la chevre ne touche point au chou.* 3

PROBL. III. *Trois maris jaloux ſe trouvent avec leurs femmes pendant une nuit fort obſcure, au paſſage d'une riviere. Ils rencontrent un bateau ſans batelier. Ce bateau eſt ſi petit, qu'il ne peut porter que deux perſonnes à la fois. On demande*

comment ces ſix perſonnes paſſeront deux à deux, de ſorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, ſi ſon mari n'eſt préſent. 4

PROBL. IV. *Faire l'addition d'une maniere particuliere, & qui ſoit inconnue à tout autre.* 5

PROBL. V. *Souſtraire par une ſeule opération pluſieurs ſommes de pluſieurs autres ſommes données.* 6

PROBL. VI. *Multiplication abrégée.* 7

Multiplication par les doigts. 11

Autre multiplication abregée. 12

PROBL. VII. *Diviſion abregée.* 13

PROBL. VIII. *De quelques propriétés des nombres.* 16

Regle générale pour trouver tant de nombres amiables qu'on voudra. 39

Table des nombres premiers entre 1 & 10000. 47

PROBL. IX. *Des triangles rectangles en nombres.* 50

PROBL. X. *De la progreſſion arithmétique.* 56

QUESTION I. *Un propriétaire fait faire un puits à un maçon, avec cette condition, qu'il lui donnera* 3 *livres pour la premiere toiſe de profondeur,* 5 *pour la ſeconde,* 7 *pour la troiſieme, & ainſi de ſuite en augmentant de* 2 *l. à chaque toiſe, juſqu'à* 20 *toiſes de profondeur, on demande combien il ſera dû au maçon quand les* 20 *toiſes de profondeur ſeront achevées.* 60

QUEST. II. *Un voyageur a fait* 100 *lieues en huit jours; chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent, & le premier jour il a fait* 2 *lieues; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.* 61

QUEST. III. *Un voyageur a fait* 100 *lieues en* 8 *jours, & il a fait chaque jour* 3 *lieues plus que le précédent; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.* 62

QUEST. IV. *Un voleur en s'enfuyant fait* 8 *lieues par jour; il eſt pourſuivie par un archer qui n'a fait que* 3 *lieues le premier jour,* 5 *le ſecond,* 7 *le troiſieme,*

& ainſi de ſuite en augmentation de 2 lieues chaque jour. On demande en combien de jours l'archer atteindra le voleur, & combien de lieues chacun aura fait. 63

QUEST. V. *On ſuppoſe que de Paris à Lyon il y a 100 lieues, que 2 couriers ſont partis en même tems & par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faiſant 2 lieues chaque jour plus que le précédent, & l'autre de Lyon pour venir à Paris, en faiſant 3 lieues chaque jour plus que le précédent, & que préciſément au milieu du chemin ils ſe ſont rencontrés, le premier au bout de cinq jours, & le ſecond au bout de 4 jours. On demande combien de lieues ces deux couriers ont fait chaque jour.* 64

QUEST. VI. *Il y a un panier & cent pommes rangées en ligne droite, & éloignées par-tout d'un pas l'une de l'autre. On demande combien de pas feroit celui qui entreprendroit de cueillir ces pommes les unes après les autres, & de les rapporter dans le panier, qui reſteroit toujours dans la même place.* 65

QUEST. VII. *Un marchand eſt convenu avec un de ſes créanciers de lui donner de l'argent chaque ſemaine : la premiere ſemaine il lui a donné cent l. la ſeconde quatre cent l. il a augmenté chaque ſemaine ſon payement de trois cent l. On demande combien il a payé la vingt huitieme ſemaine.* 66

QUEST. VIII. *Un réſervoir a douze canaux : par le ſecond il s'écoule dans une heure 2 pintes d'eau plus que par le premier : par le troiſieme 2 pintes plus que par le ſecond, & ainſi de ſuite. On ſçait que tous ces canaux laiſſent écouler 168 pintes d'eau dans une heure. On veut ſçavoir combien chacun de ces canaux laiſſe écouler d'eau pendant une heure.* 67

QUEST. IX. *Un pere de famille ordonne par ſon teſtament que l'aîné de ſes enfans prendra ſur tous ſes biens 10000 l. & le ſeptieme de ce qui reſtera ; que le ſecond prendra 20000 l. & le ſeptieme de ce qui*

reſtera ; que le troiſieme prendra 30000 *l. & le ſeptieme de ce qui reſtera, & ainſi de ſuite en augmentant toujours de* 10000 *liv. avec le ſeptieme du reſtant. Les enfans ayant ſuivi la diſpoſition du teſtament, il ſe trouve qu'ils ont été également partagés. On demande quel étoit le bien à partager, le nombre des enfans, & la ſomme que chacun a eu.* 67

PROBL. XI. *De la progreſſion géométrique.* 68

QUEST. I. *Un grand navire en pourſuit un plus petit, dont il eſt éloigné de* 4 *lieues, & il va deux fois plus vite que le plus petit : ils ſont ſur le même rumb, &c. On demande le chemin que le grand navire doit faire pour atteindre le petit.* 75

QUEST. II. *On ſuppoſe qu'Achille aille dix fois plus vite qu'une tortue, qui auroit une lieue d'avance. On demande s'il eſt poſſible qu'Achille attrape cette tortue, & à quelle diſtance il l'attrapera.* 76

QUEST. III. *Une pendule a deux aiguilles, l'une des heures, & l'autre des minutes. Suppoſons qu'elles partent toutes deux du point de midi, on demande en quel autre point elles doivent ſe rencontrer.* ibid.

QUEST. IV. *Un maquignon vend un très-beau cheval, il ſe contente du prix du vingt-quatrieme clou du cheval, pourvu qu'on veuille compter de maniere que du premier clou on donnât un denier, du ſecond* 2 *deniers, du troiſieme* 4 *deniers, & ainſi de ſuite, en doublant les deniers juſqu'au vingt-quatrieme clou. On demande de quel prix ſeroit le cheval.* 77

QUEST. V. *Une vieille dame poſſede trente deux belles terres ; elle eſt fort avare, elle aime l'argent encore plus que ſes terres, elle voudroit en vendre quelques-unes, afin d'avoir le plaiſir de marcher ſur l'or ; mais pour ne point effrayer un de ſes héritiers, qui eſt homme de cœur, elle ne propoſe d'abord que la moindre à vendre, ſous prétexte que l'argent eſt rare, & qu'elle à quelques dettes à payer, quoique ſes coffres ſoient pleins. On offre de lui donner pour cette terre*

la ſomme qui conviendroit à la trente-deuxieme de ſes terres, ſi on payoit un ſol pour la premiere, deux ſols pour la ſeconde, quatre ſols pour la troiſieme, & ainſi de ſuite en doublant les ſols juſques à la trente-deuxieme terre. Cette dame appréhende d'être trompée, elle demande quel prix on lui donneroit de ſa terre. 78

QUEST. VI. *On ſuppoſe qu'un grain de bled produiſe 50 autres grains dans la premiere année; qu'on ſeme ces 50 grains, & qu'ils produiſent chacun 50 grains la deuxieme année, & ainſi de ſuite. On demande quel ſera le nombre des grains de bled qui ſeront produits pendant douze années.* 79

QUEST. VII. 80

PROBL. XII. *Des quarrés magiques.* 81

Des quarrés magiques impairs, formés par des termes en progreſſion arithmétique. 85

QUEST. *Diſpoſer en trois rangs les neuf premieres cartes, depuis l'as juſqu'au neuf, de ſorte que tous les points de chaque rang pris en long, ou en large, ou en diagonale, faſſent enſemble une même ſomme.* 93

Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progreſſion arithmétique. 94

Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progreſſion géométrique. 98

Des quarrés magiques impairs, dont les termes ſont en progreſſion géométrique. 100

Des quarrés magiques en proportion harmonique. 101

PROBL. XIII. *Du triangle arithmétique.* 103

Des combinaiſons. ibid.

QUEST. I. 112

QUEST. II. 113

Des permutations. ibid.

TABLE

QUEST. I. 118
QUEST. II. ibid.
QUEST. III. 119
QUEST. IV. ibid.
QUEST. V. 120
QUEST. VI. 121
QUEST. VII. 122
Des parties de jeu. 123
Du jeu de dés. 131
PROBL. XIV. *Pluſieurs dés étant jettés, trouver le nombre des points qui en proviennent après quelques opérations.* 135
PROBL. XV. *Deux dés étant jettés, trouver les points de deſſus de chaque dé ſans les voir.* 138
PROBL. XVI. *Trois dés étant jettés, trouver les points de deſſus de chaque dé, ſans les voir.* 140
PROBL. XVII. *Deviner le nombre que quelqu'un a penſé.* 141
PROBL. XVIII. *Trouver le nombre qui reſte à quelqu'un après quelques opérations, ſans lui rien demander.* 151
PROBL. XIX. *Trouver le nombre que quelqu'un aura penſé, ſans lui rien demander.* 154
PROBL. XX. *Deviner deux nombres que quelqu'un aura penſé.* 156
PROBL. XXI. *Deviner pluſieurs nombres que quelqu'un aura penſé.* 160
PROBL. XXII. *Une perſonne tenant dans une main un certain nombre pair de piſtoles, & un nombre impair en l'autre main, deviner en quelle main eſt le nombre pair.* 164
QUESTION. *Une perſonne tenant une piece d'or dans une main, & une piece d'argent en l'autre, trouver en quelle main eſt la piece d'or, & en quelle main eſt la piece d'argent.* 166

PROBL. XXIII. *Trouver deux nombres dont on connoît la raiſon & la difference.* 167
QUESTION. *Quelqu'un ayant dans une main autant de pieces de monnoie que dans l'autre, deviner combien il en a en chaque main.* 168
PROBL. XXIV. 169
QUEST. I. *Une perſonne ayant pris autant de jettons ou pieces de monnoie dans une main que dans l'autre, deviner combien il y en a en tout.* 169
QUEST. II. *Une perſonne charitable ſortant de ſa maiſon, rencontre à ſa porte un certain nombre de pauvres, &c.* 175
QUEST. III. *De l'âne & du mulet.* 176
QUEST. IV. *Les Graces portant des couronnes de fleurs, &c.* 178
QUEST. V. *Trois perſonnes veulent acheter une maiſon 16000 livres, mais ils ſont convenus que l'un donneroit la moitié de l'argent, l'autre le tiers, & le troiſieme le quart. On demande combien ils doivent donner chacun.* 179
QUEST. VI. *Un pere en mourant laiſſe ſa femme enceinte, &c.* ibid.
QUEST. VII. *On dit d'une perſonne qu'elle a paſſé le quart de ſa vie en enfance, la cinquieme partie en la jeuneſſe, le tiers en l'âge viril, & qu'il y a treize ans qu'elle a commencé à entrer dans ſa vieilleſſe. On demande l'âge de cette perſonne.* ibid.
QUEST. VIII. *Quarante-une perſonnes ſe ſont trouvées à un repas: il y avoit des hommes, des femmes & des enfans. La dépenſe a été de quarante ſols, les hommes ont payé quatre ſols par tête, les femmes trois ſols chacune, & les enfans quatre deniers chacun. On demande le nombre des hommes, celui des femmes, & celui des enfans.* 180
QUEST. IX. *Du lion de bronze, &c.* ibid.

QUEST. X. *Trois imprimeurs veulent entreprendre l'impreſſion d'un livre, &c.* 181

PROBL. XXV. *Deux perſonnes étant convenues de prendre à volonté des nombres moindres qu'un nombre propoſé, en continuant alternativement juſqu'à ce que tous leurs nombres faſſent enſemble un nombre déterminé plus grand que je le propoſe, faire qu'on arrive le premier à ce nombre déterminé plus grand.* 182

PROBL. XXVI. *diviſer un nombre donné en deux parties dont la raiſon ſoit égale à celle de deux nombres donnés.* 184

QUEST. I. *Faire la monnoie d'un écu blanc en deux eſpeces différentes, en ſorte qu'il y ait autant d'une eſpece que de l'autre.* 185

QUEST. II. *Un marchand de vin n'a que deux ſortes de vins, l'un à dix ſols, & l'autre à cinq ſols la bouteille. On lui demande trente bouteilles de vin à huit ſols. Que doit-il faire pour mêler ces deux vins, de ſorte que la bouteille revienne à huit ſols?* 187

PROBL. XXVII. *Trouver un nombre tel qu'étant diviſé ſéparément par des nombres donnés, il reſte par-tout 1, & étant diviſé par un autre nombre donné, il ne reſte rien.* 188

QUEST. *Trouver combien il y avoit de louis d'or dans une bourſe qu'une perſonne dit avoir perdue, & qui aſſure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en reſtoit toujours un, & qu'en les comptant ſept à ſept, il n'en reſtoit point.* 192

PROBL. XXVIII. *Diviſer pluſieurs nombres donnés chacun en deux parties, & trouver deux nombres: en ſorte que multipliant la premiere partie de chacun des nombres donnés par le premier nombre trouvé, & la ſeconde par le ſecond, la ſomme des*

deux produits ſoit par-tout la même. 199
QUEST. I. *Une femme a vendu dix pommes au marché à un certain prix, une autre femme en a vendu vingt-cinq au même prix, & une troiſieme femme en a vendu trente auſſi au même prix, & chacune a rapporté une même ſomme d'argent. On demande comment cela ſe peut faire.* 201
QUEST. II. *Du chef de cuiſine, &c.* 211
QUEST. III. *Une femme de la campagne a porté au marché des œufs, des fromages, &c.* 212
PROBL. XXIX. *Pluſieurs nombres pris ſuivant leur ſuite naturelle, 1, 2, 3, 4, &c. étant diſpoſés en rond, deviner celui que quelqu'un aura penſé.* ibid.
PROBL. XXX. *Ayant fait prendre à trois perſonnes un nombre de jettons ou de cartes à certaines conditions, deviner combien chacune en aura pris.* 214
PROBL. XXXI. *De trois cartes inconnues, deviner celle que chacune des trois perſonnes aura priſe.* 215
PROBL. XXXII. *Trois cartes ayant été préſentées à trois perſonnes, deviner celle que chacune aura priſe.* 217
PROBL. XXXIII. *Deviner entre pluſieurs cartes celle que quelqu'un aura penſé.* 218
PROBL. XXXIV. *Pluſieurs cartes différentes étant propoſées ſucceſſivement à autant de perſonnes, pour en retenir une dans ſa mémoire, deviner celle que chacune aura penſé.* 219
PROBL. XXXV. *Pluſieurs cartes étant diſpoſées également en trois rangs, deviner celle que quelqu'un aura penſé.* 220
PROBL. XXXVI. *Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tiré d'un jeu de cartes.* 221
PROBL. XXXVII. *Deviner le nombre de tous les points qui ſont en deux cartes qu'on aura tiré d'un*

jeu de cartes entier. 224

PROBL. XXXVIII. *Deviner le nombre de tous les points qui ſont en trois cartes, qu'on aura tiré à volonté d'un jeu de cartes.* 224

PROBL. XXXIX. *De ſeize jettons, deviner celui que quelqu'un aura penſé.* 231

PROBL. XL. *Du jeu de l'anneau.* 233

PROBL. XLI. *Pluſieurs cartes étant diſpoſées en divers rangs, deviner celle que quelqu'un aura penſé.* 236

PROBL. XLII. *Ayant un vaſe rempli de huit pintes de quelque liqueur, en mettre juſtement la moitié dans un autre vaſe de cinq pintes, par le moyen d'un troiſieme vaſe contenant trois pintes.* 238

PROBL. XLIII. *Une perſonne a une bouteille de douze pintes pleine de vin : il en veut donner ſix pintes au frere quêteur ; il n'a pour les meſurer que deux autres bouteilles, l'une de ſept pintes, & l'autre de cinq. Que doit-il faire pour avoir les ſix pintes dans la bouteille de ſept pintes ?* 240

PROBL. XLIV. *Partager à trois perſonnes vingt-un tonneaux, dont il y en a ſept vuides, ſept pleins & ſept demi-pleins ; de telle maniere que ces trois perſonnes ayent autant de tonneaux & de vin l'un que l'autre.* 242

PROBL. XLV. *Quinze Chrétiens & quinze Turcs ſe trouvant, &c.* 246

PROBL. XLVI. *Trois choſes ayant été diſtribuées ſecretement à trois perſonnes, deviner celle que chacun aura pris.* 250

PROBL. XLVII. *Trois perſonnes ont un certain nombre d'écus : la premiere perſonne donne des ſiens aux deux autres autant qu'elles en ont chacune ; enſuite la ſeconde en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune ; enfin la troiſieme en donne aux*

deux autres autant qu'elles en ont chacune. Cette diſtribution étant faite, il ſe trouve que chaque perſonne a huit écus. On demande combien elles en avoient chacune. 253

PROBL. XLVIII. *Il ſe trouve trois perſonnes dans une compagnie, la ſeconde eſt plus âgée que la premiere de douze ans, la troiſieme eſt plus âgée que la ſeconde de treize ans : leurs trois âges font le nombre de cent ans. On demande quel eſt l'âge de chaque perſonne.* 254

PROBL. XLIX. *Découvrir ſi un ouvrage que l'ouvrier aſſure être de pur or, eſt mêlé d'argent, ſans l'endommager.* ibid.

PROBL. L. *Un boucher donne commiſſion d'acheter pour cent écus cent bêtes ; ſçavoir, des bœufs, des veaux, &c.* 255

PROBL. LI. QUEST. I. *Un particulier a fait marché avec un ouvrier pour creuſer un puits, &c.* 256

QUEST. II. *Un tailleur a pris ſix aulnes de drap, qui a trois quarts de large, pour faire un habit complet : on veut ſçavoir combien il faut d'aulnes d'une étoffe qui n'a qu'une demi-aulne de large.* 257

PROBL. LII. *Faire parcourir au cavalier du jeu des échets toutes les caſes du damier, l'une après l'autre, ſans entrer deux fois dans la même caſe.* 260

PROBLEMES DE GEOMETRIE.

PROBLEME I. *Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par l'une de ſes extrêmités.* 270

PROBL. II. *Mener par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.* 271

PROBL. III. *Diviſer d'une même ouverture de compas une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra.* 272

PROBL. IV. *Faire un angle qui ſoit la moitié, ou le double d'un angle donné.* 273
PROBL. V. *Faire un angle qui ſoit le tiers, ou le triple d'un angle donné.* 274
PROBL. VI. *Trouver à deux lignes données une troiſieme, & autant d'autres proportionnelles qu'on voudra.* ibid.
PROBL. VII. *Décrire ſur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les aires ſoient égales.* 275
PROBL. VIII. *Décrire ſur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les contours ſoient égaux.* 276
PROBL. IX. *Décrire deux triangles iſoſceles différens, de même aire, & de même contour.* 277
PROBL. X. *Décrire différens triangles rectangles, dont les aires ſoient égales.* 280
PROBL. XI. *Décrire trois triangles égaux, dont le premier ſoit rectangle, le ſecond ſoit acutangle, & le troiſieme ſoit obtuſangle.* 281
PROBL. XII. *Trouver une ligne droite égale à un arc de cercle donné.* 284
PROBL. XIII. *Trouver entre deux lignes données, une, ou deux, ou trois moyennes proportionnelles.* 286
PROBL. XIV. *Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui ſe touchent mutuellement, & qui touchent auſſi la circonférence du cercle donné.* 288
PROBL. XV. *Décrire dans un demi-cercle donné trois cercles qui touchent la circonférence & le diametre de ce demi-cercle donné, & dont celui du milieu, qui eſt le plus grand, touche les deux autres, qui ſont égaux.* 289
PROBL. XVI. *Décrire quatre cercles proportionnels, enſorte que leur ſomme ſoit égale à un cercle*

donné, & que la ſomme de leurs rayons ſoit égale à une ligne donnée. 290

PROBL. XVII. *Déterminer ſur la circonférence d'un cercle donné un arc dont le ſinus ſoit égal à la corde d'un complément de cet arc.* 291

PROBL. XVIII. *Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés ſoient en proportion géométrique.* 292

PROBL. XIX. *Décrire quatre cercles égaux qui ſe touchent mutuellement, & qui touchent par le dehors la circonférence d'un cercle donné.* 294

PROBL. XX. *Décrire un triangle rectangle dont les trois côtés ſoient en proportion arithmétique.* 295

PROBL. XXI. *Décrire autour d'un triangle équilatéral donné ſix cercles égaux, qui ſe touchent mutuellement, dont trois touchent les trois côtés du triangle, & les trois autres ſont portés par ſes ſommets.* 296

PROBL. XXII. *Pluſieurs demi-cercles qui ſe touchent au ſommet de l'angle droit de deux lignes perpendiculaires, & qui ont leurs centres ſur l'une de ces deux lignes, étant donnés, déterminer les points où ces demi-cercles peuvent être touchés par des lignes droites de ces points à un point donné ſur l'autre ligne perpendiculaire.* 297

PROBL. XXIII. *Décrire un triangle rectangle dont l'aire exprimée en nombres ſoit égale au contour.* 298

PROBL. XXIV. *Décrire au dedans d'un triangle équilatéral trois cercles égaux qui ſe touchent mutuellement, & qui touchent auſſi les trois côtés de ce triangle.* 299

PROBL. XXV. *Décrire un triangle rectangle dont l'aire exprimée en nombres ſoit ſeſquialtere de*

contour auſſi exprimé en nombres. 301

PROBL. XXVI. *Décrire au dedans d'un quarré donné quatre cercles égaux, qui ſe touchent mutuellement, & qui touchent auſſi les côtés de ce quarré.* 302

PROBL. XXVII. *Décrire un parallelogramme rectangle, dont l'aire exprimée en nombres ſoit égale au contour.* 303

PROBL. XXVIII. *Meſurer avec le chapeau une diſtance qui n'eſt acceſſible qu'en une de ſes extrêmités.* 305

PROBL. XXIX. *Meſurer une ligne horiſontale, qui n'eſt acceſſible qu'en l'une de ſes deux extrêmités, par le moyen de deux bâtons inégaux.* 306

PROBL. XXX. *Meſurer une hauteur acceſſible par le moyen de ſon ombre.* 307

PROBL. XXXI. *Trouver à trois lignes données une quatrieme proportionnelle.* ibid.

PROBL. XXXII. *Décrire ſur une ligne donnée un parallelogramme rectangle, dont l'aire ſoit double de celle du triangle donné.* 308

PROBL. XXXIII. *Changer un triangle donné en un autre triangle, dont chaque côté ſoit plus grand que chaque côté du triangle donné.* ibid.

PROBL. XXXIV. *Deux demi-cercles qui ſe touchent en dedans étant donnés ſur une même ligne droite, décrire un cercle qui touche la ligne droite, & les circonférences des deux demi-cercles donnés.* 309

PROBL. XXXV. *Trois demi-cercles qui ſe touchent en dedans, étant donnés ſur une ligne droite, décrire un cercle qui touche les circonférences des trois demi-cercles.* 311

PROBL. XXXVI. *Trois demi-cercles qui ſe touchent en dedans, étant donnés, &c.* 312

PROBL. XXXVII. *Décrire un triangle dont l'aire*

& le contour ſoient au même nombre quarré. 314
PROBL. XXXVIII. *Faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés, ſans en connoître le centre.* 315
PROBL. XXXIX. *Deux lignes perpendiculaires à une ligne tirée par leurs extrêmités, étant données, trouver ſur cette ligne auſſi donnée, un point également éloigné de deux autres extrêmités des deux lignes données.* 316
PROBL. XL. *Décrire deux triangles rectangles, dont les lignes ſoient telles, &c.* 317
PROBL. XLI. *Diviſer la circonférence d'un demi-cercle donné en deux arcs inégaux, en ſorte que le demi-diametre ſoit moyen proportionnel entre les cordes de ces deux arcs.* 319
PROBL. XLII. *Une échelle d'une longueur connue, &c.* 320
PROBL. XLIII. *Meſurer une diſtance acceſſible ſur la terre par le moyen de la lumiere & du bruit d'un canon.* 321
PROBL. XLIV. *Meſurer la ſurface d'un parallelogramme.* 323
PROBL. XLV. *Meſurer la ſurface d'un cercle.* 325
QUEST. I. *Une cuiſiniere étant allée au marché, &c.* 327
QUEST. II. *Une corde de dix pieds de long entoure deux cent piques, on veut ſçavoir combien une corde de huit pieds de long entourera de piques.* 328
QUEST. III. *Sempronius a emprunté de Caïus un ſac de bled qui avoit cinq pieds de haut & quatre pieds de large; quand il fallut rendre le bled, Sempronius prit quatre ſacs hauts de cinq pieds, &c.* ibid.
QUEST. IV. V. VI. ibid.
PROBL. XLVI. *Tracer un ovale ſur le terrein.* 329
PROBL. XLVII. *Meſurer la ſurface d'un ovale.* 330

PROBLEMES DE MUSIQUE.

PROBL. I. *Faire ſur les accords les quatre opérations de l'arithmétique.* 332

PROBL. II. *Exprimer les accords par logarithmes.* 334

PROBL. III. *Partager l'intervalle de l'octave en ſept autres intervalles ſimples, qui ſont les tons & demi-tons.* 335

PROBL. IV. *Meſurer la durée des tons.* 341

PROBL. V. *Faire trembler ſenſiblement & à vue d'œil la corde d'une baſſe de viole, ou de quelqu'autre inſtrument ſans que perſonne y touche.* 342

PROBLEMES D'OPTIQUE.

PROBL. I. *Faire qu'un objet, étant vu de loin ou de près, paroiſſe toujours de la même grandeur.* 346

PROBL. II. *La ligne AC étant donnée, & la ligne CZ indéterminée étant perpendiculaire ſur AC à ſon extrêmité C, trouver dans la ligne CZ un point D, d'où la partie AB de la ligne AC ſoit vue la plus grande qu'elle puiſſe être vue dans toute l'étendue de la ligne CZ.* 347

PROBL. III. *L'œil étant placé en un point comme B, & regardant vers la ligne AE, couper de cette ligne la partie DE, qui ſoit vue de la même grandeur qu'une autre partie AC de la même ligne AE.* 348

PROBL. IV. *Trouver un point duquel deux parties inégales d'une ligne droite paroiſſent égales.* 349

PROBL. V. *Un anneau étant placé à une certaine diſtance, propoſer de l'enfiler avec une baguette recourbée par l'une de ſes extrêmités.* 350

PROBL. VI. *Repréſenter en perſpective tel objet que l'on voudra, ſans ſe ſervir de point de vue.* 351

PROBL. VII. *Repréſenter en perſpective un polyedre équilatéral, terminé par ſix quarrés égaux, & par huit exagones réguliers & égaux entre eux.* 352

PROBL. VIII. *Repréſenter en perſpective un polyedre équilatéral, terminé par ſix quarrés égaux, & par huit triangles équilatéraux & égaux entre eux.* 355

PROBL. IX. *Repréſenter en perſpective un polyedre équilatéral, terminé par ſix quarrés égaux, & par douze triangles iſoſceles & égaux entre-eux, dont la hauteur eſt égale à la baſe.* ibid.

PROBL. X. *Repréſenter en perſpective un polyedre équilatéral terminé par douze quarrés égaux, par huit exagones réguliers & égaux, & par ſix octogones réguliers & égaux.* 357

PROBL. XI. *Un point de quelque objet, & le lieu de l'œil, étant donnés, trouver le point de réflexion ſur la ſurface d'un miroir plat.* 359

PROBL. XII. *Tirer par derriere l'épaule un piſtolet auſſi juſtement que ſi on le couchoit en joue.* 360

PROBL. XIII. *Les points d'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion ſur la ſurface d'un miroir plat, étant donnés, déterminer le lieu où l'on doit voir l'image de l'objet propoſé.* 361

PROBL. XIV. *Se repréſenter dans un miroir comme volant.* 363

PROBL. XV. *Diſpoſer pluſieurs miroirs de maniere qu'on ſe voie dans chacun en même tems.* ibid.

PROBL. XVI. *Un mari jaloux étant dans une chambre, lui fait voir ce que fait ſa femme, &c.* 364

PROBL. XVII. *Faire paroître dans un miroir un autre objet que celui qui ſemble devoir y être repréſenté.* 365

PROBL. XVIII. *Faire une boîte où l'on voie des objets, &c.* 367

point déterminé. 439

PROBL. XLIII. *Décrire ſur un plan une figure difforme, qui paroiſſe dans ſa perfection étant vue par réflexion dans un miroir plan.* 440

PROBL. XLIV. *Décrire ſur un plan horiſontal une figure difforme, qui paroiſſe au naturel ſur un plan vertical tranſparent poſé entre l'œil & la figure difforme.* 442

PROBL. XLV. *Décrire ſur la ſurface convexe d'une ſphere une figure difforme, qui paroiſſe au naturel étant regardée d'un point déterminé.* 443

PROBL. XLVI. *Décrire ſur la ſurface convexe d'un cylindre, une figure difforme, qui paroiſſe belle quand elle ſera vue d'un point déterminé.* 445

PROBL. XLVII. *Décrire ſur la ſurface convexe d'un cone une figure difforme, qui paroiſſe en ſon naturel étant regardée d'un point déterminé.* 446

PROBL. XLVIII. *Décrire ſur un plan horiſontal une figure difforme, qui paroiſſe belle ſur la ſurface convexe d'un miroir cylindrique droit, étant vue par réflexion d'un point donné.* 448

PROBL. XLIX. *Décrire ſur un plan horiſontal une figure difforme qui paroiſſe belle ſur la ſurface convexe d'un miroir conique élevé à angles droits ſur ce plan, étant vue par réflexion d'un point donné dans l'axe prolongé de ce cone.* 451

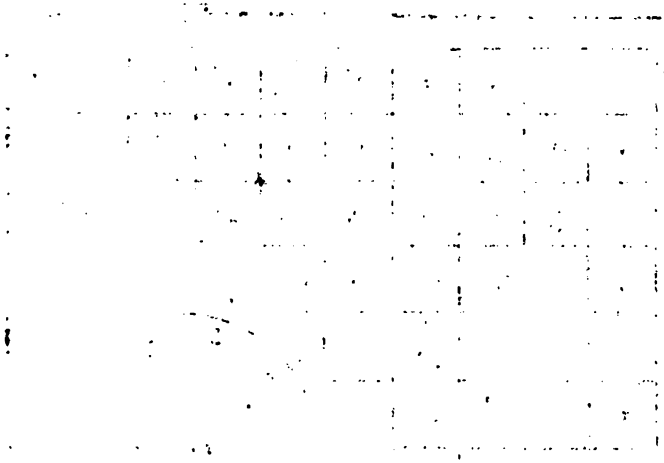
PROBL. L. *Décrire une lanterne artificielle, par le moyen de laquelle on puiſſe lire la nuit de fort loin.* 453

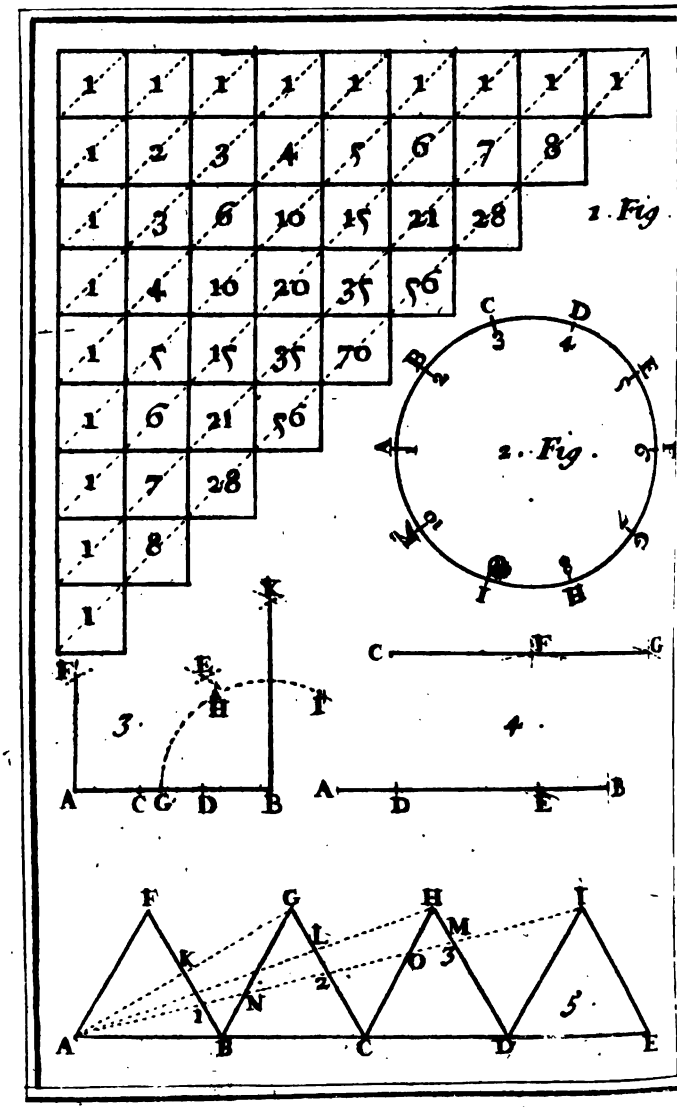
PROBL. LI. *Par le moyen de deux miroirs plans faire paroître un viſage ſous des formes différentes.* 455

PROBL. LII. *Faire voir un jetton qui ſeroit caché à l'œil dans le fond d'un vaſe vuide.* 456

PROBL. LIII. *Repréſenter une iris ſur le plancher d'une chambre obſcure.* 457

Fin de la table du I. tome.





Tome I. Planche 1.

Figure. 1.

Figure. 3.

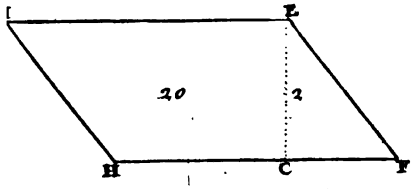


Figure. 2.

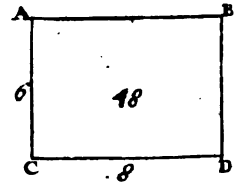


Figure. 5.

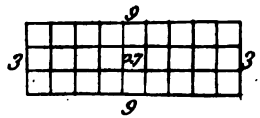


Figure. 4.

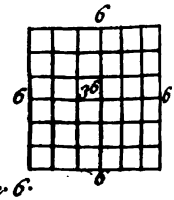


Figure. 6.

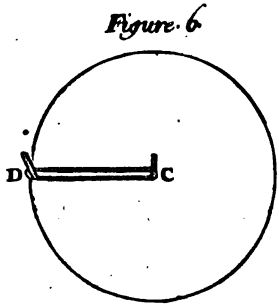
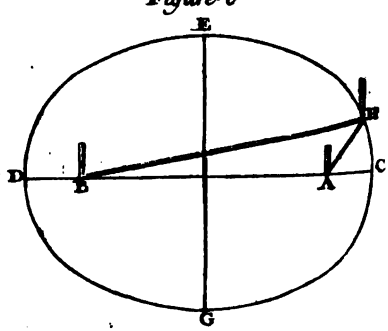
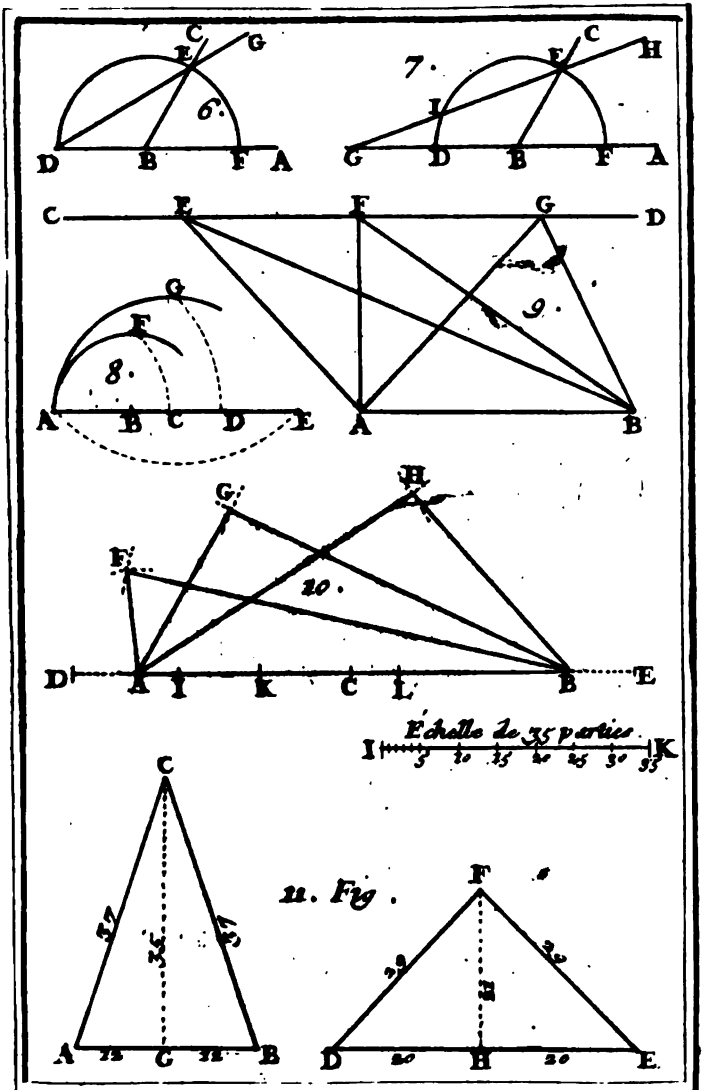
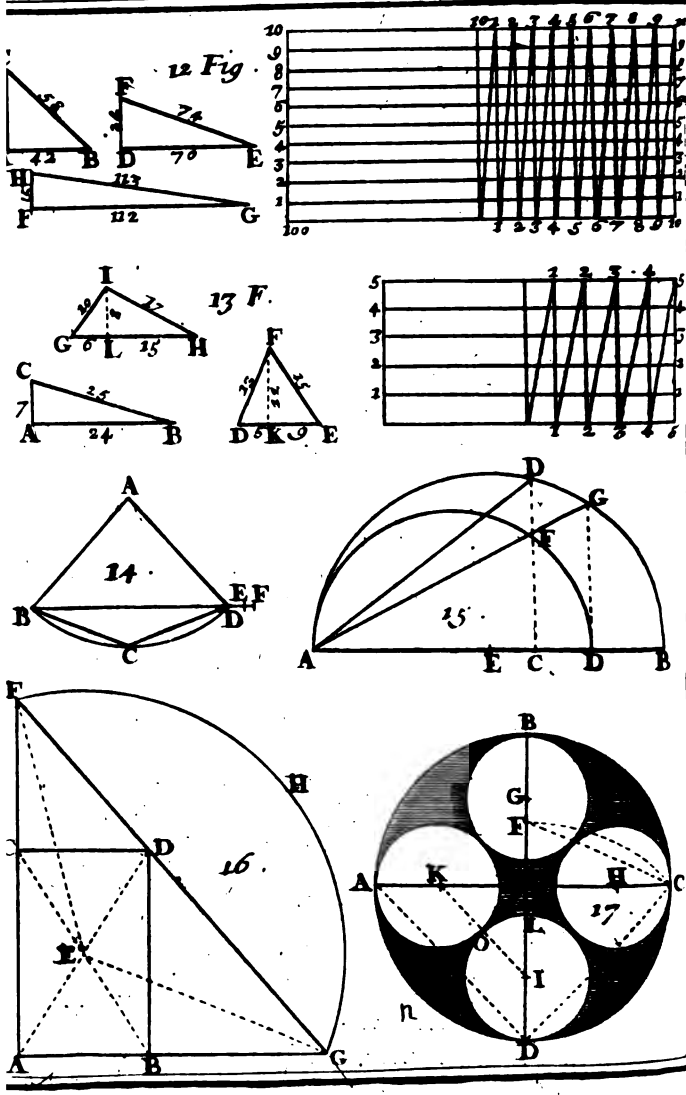


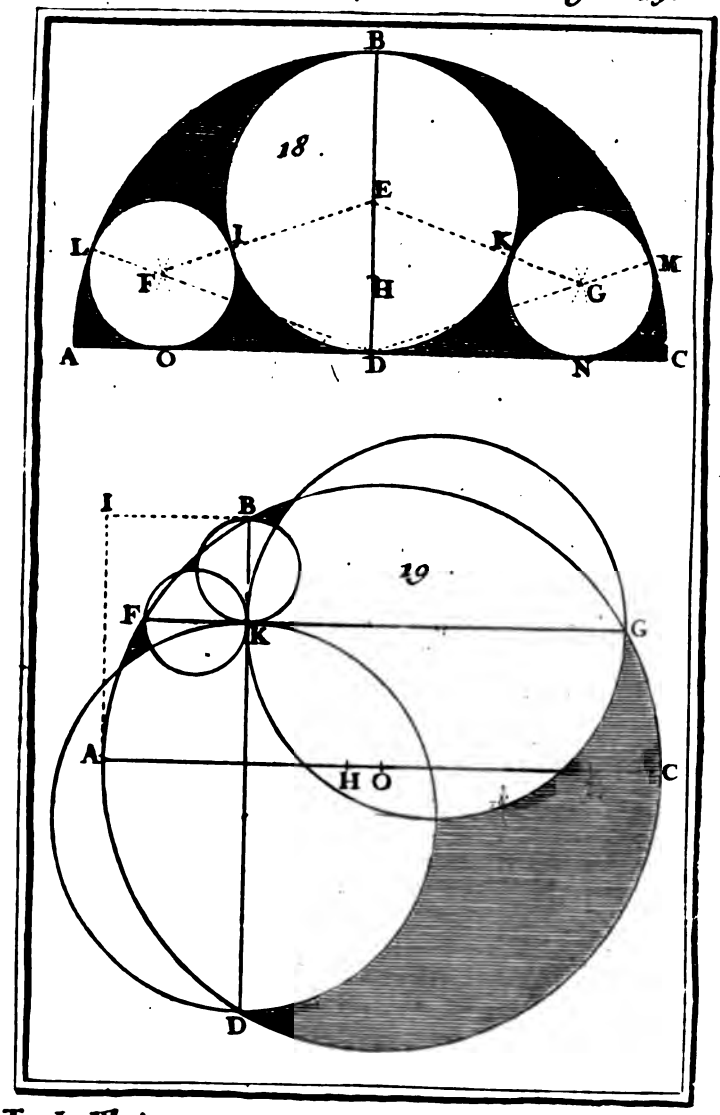
Figure. 6.



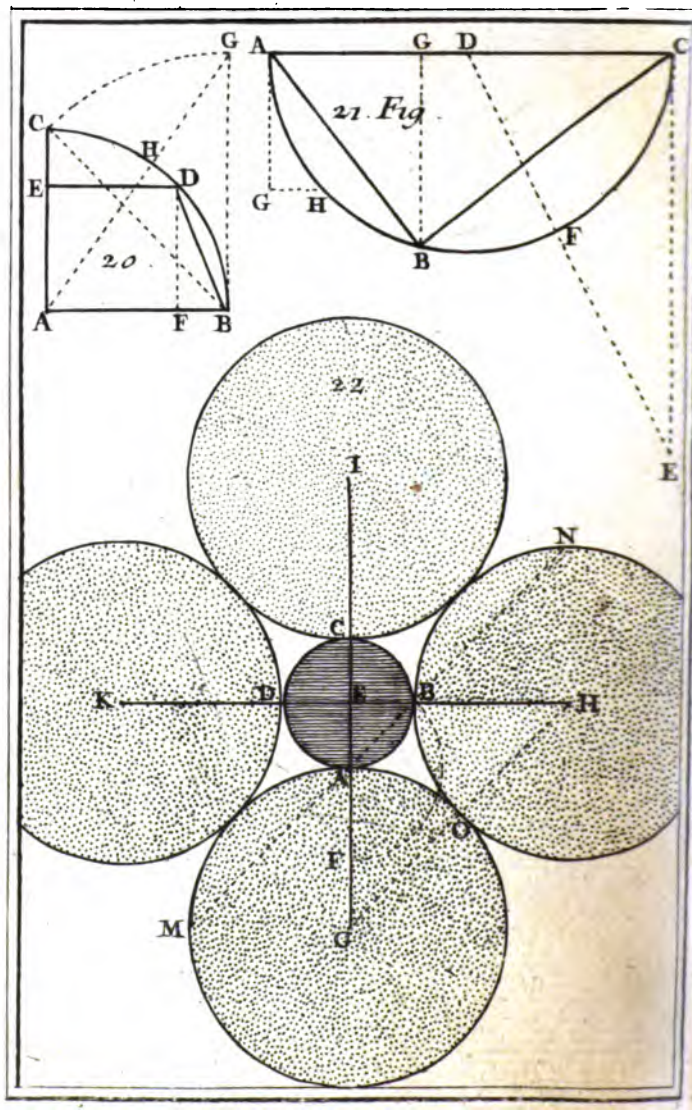

C
E
G
6.
D
B
F
A
7.
C
F
H
I
G
D
B
F
A
C
E
F
G
D
9.
G
F
8.
A
B
C
D
E
A
B
H
G
E
10.
D
A
I
K
C
L
B
E
Échelle de 35 parties.
I
5
10
15
20
25
30
35
K
C
37
37
35
A
12
C
12
B
11. Fig.
F
29
29
21
D
20
H
20
E

T. I. pl. 3

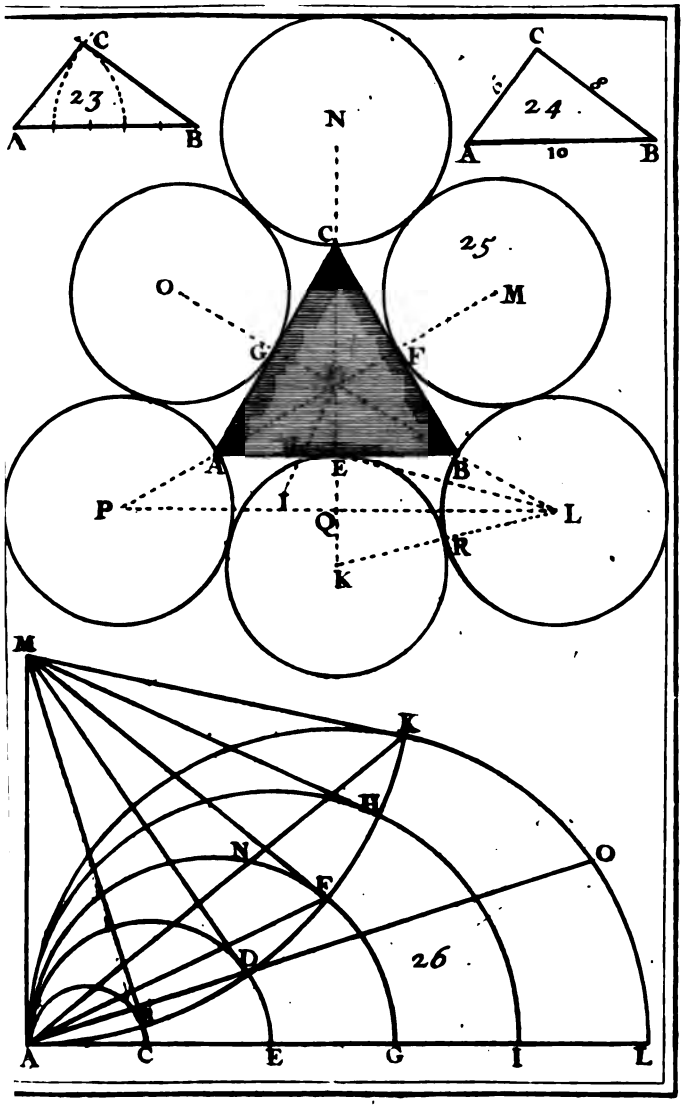

12 Fig.
13 F.
14.
15.
16.
17.



To. I. Pl. 5

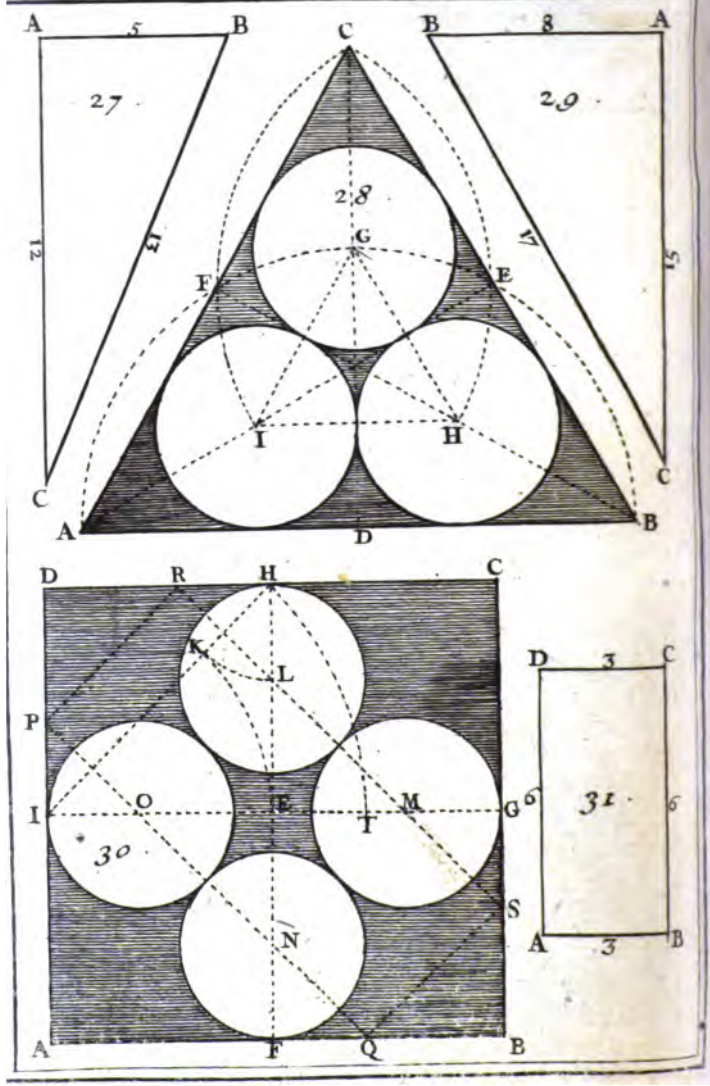


To. I. Pl. 6.

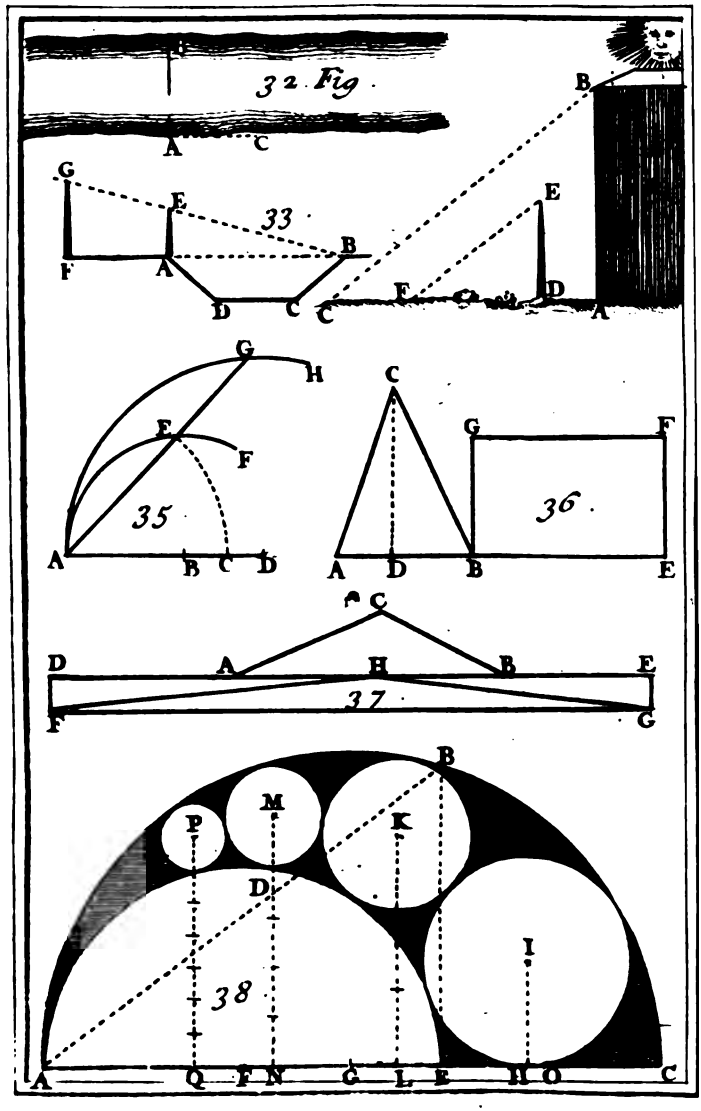


D

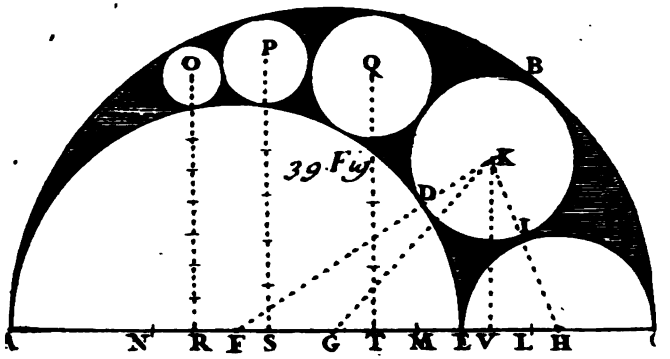
I. Pl 7.

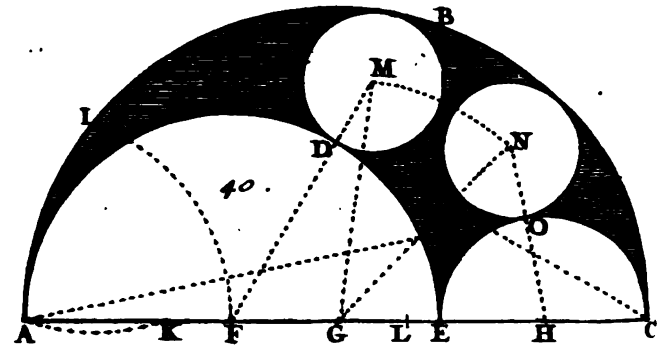

A
5
B
27
12
13
C
C
B
8
A
29
17
15
C
28
G
F
E
I
H
A
D
B
D
R
H
C
K
L
P
I
O
E
M
T
G
30
N
S
A
F
Q
B
D
3
C
6
31
6
A
3
B

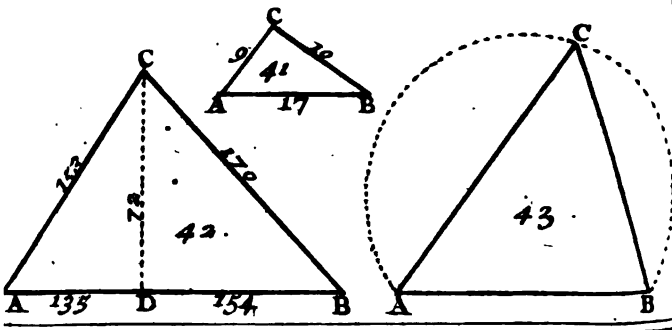
To I. Pl. 8.


32 Fig .
A
C
B
G
E
33 .
F
A
B
D
C
C
E
F
D
A
G
H
E
F
35 .
A
B C D
C
G
F
36 .
A D B
E
C
D
A
H
B
E
37 .
F
G
B
M
P
K
D
I
38 .
A
Q F N
G
L
E
H O
C

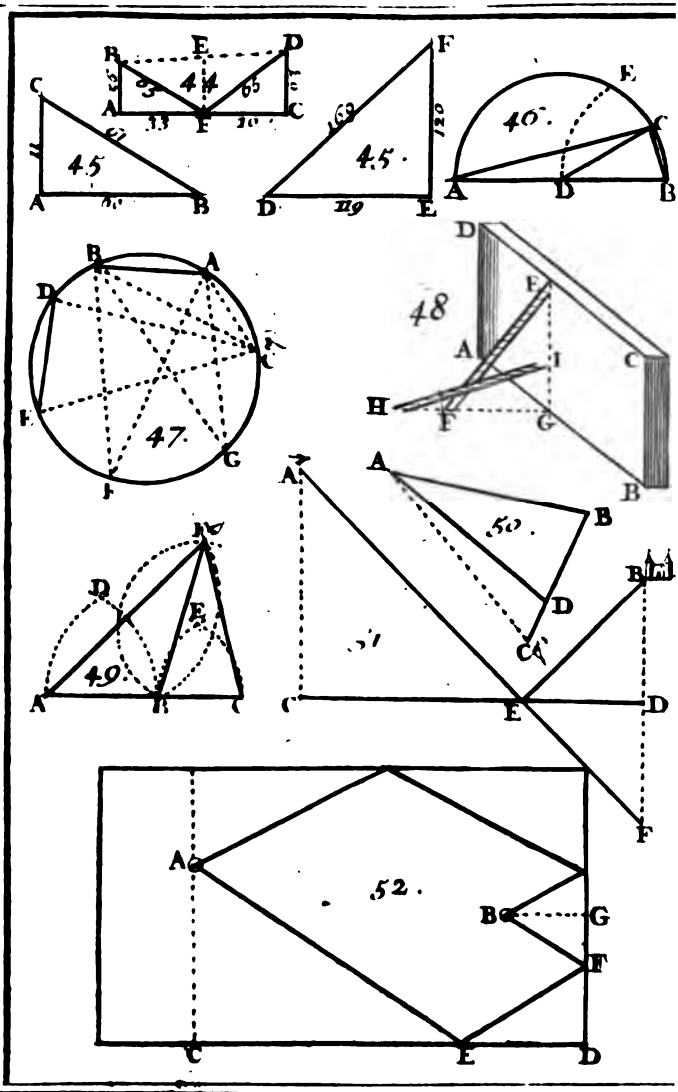
To I. Pl. 9.


O
P
Q
B
K
D
I
39 Fig.
N
R
F
S
G
T
M
E
V
L
H


B
M
L
D
N
40.
O
A
K
F
G
L
E
H
C


C
9
10
41
A
17
B
C
153
128
72
42.
A
135
D
154
B
C
43.
A
B

o I. Pl. 10.

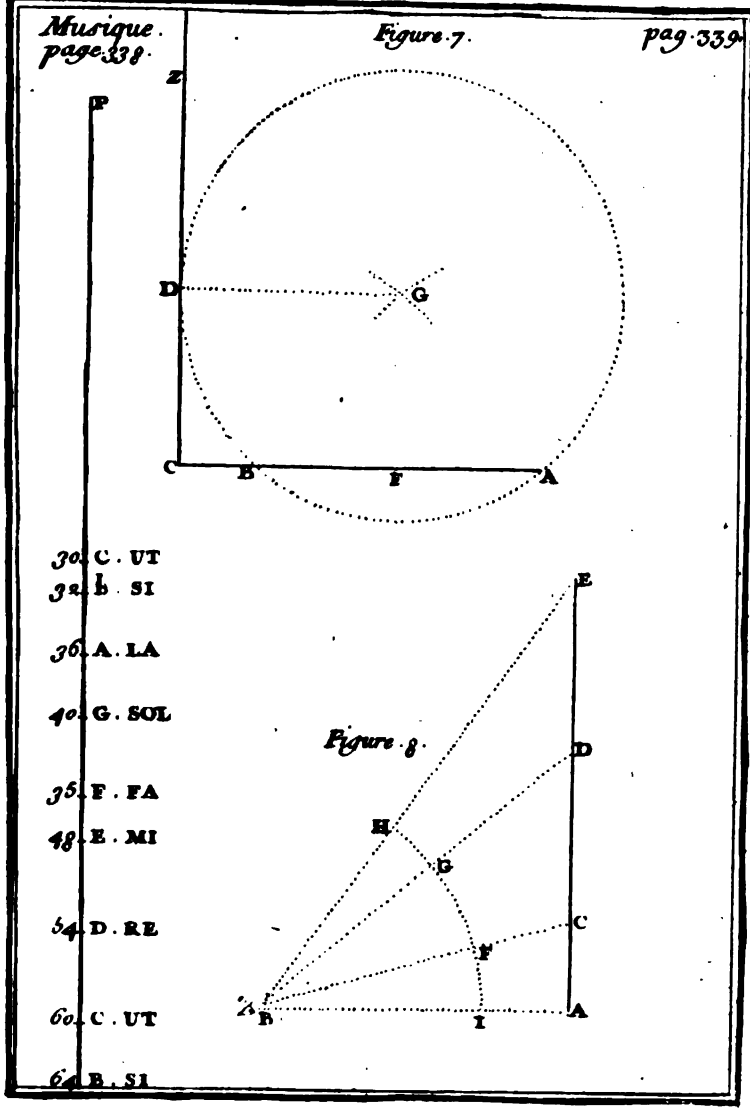


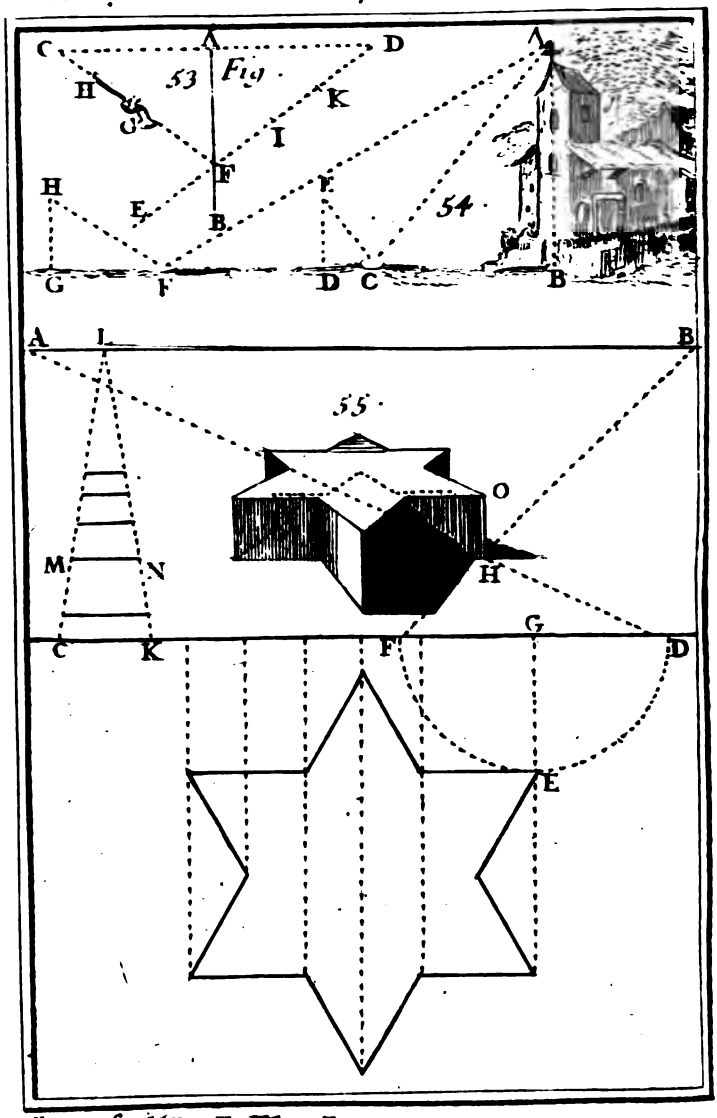
Tc. I. Pl. n.

Musique. page 338.

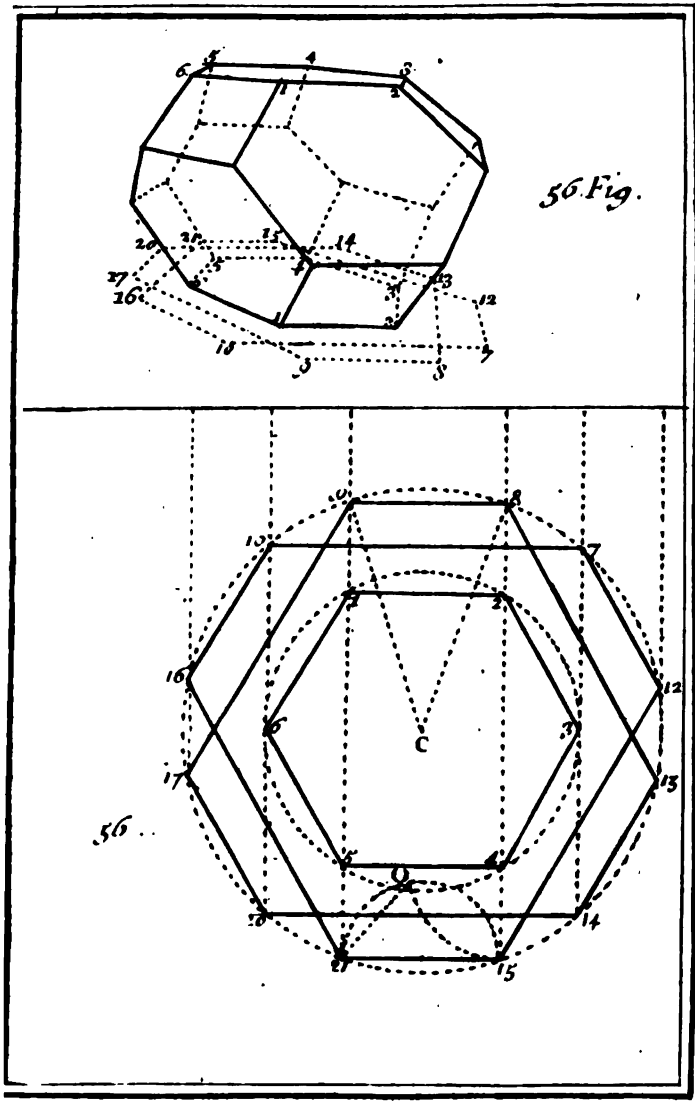
Figure 7.

pag 339

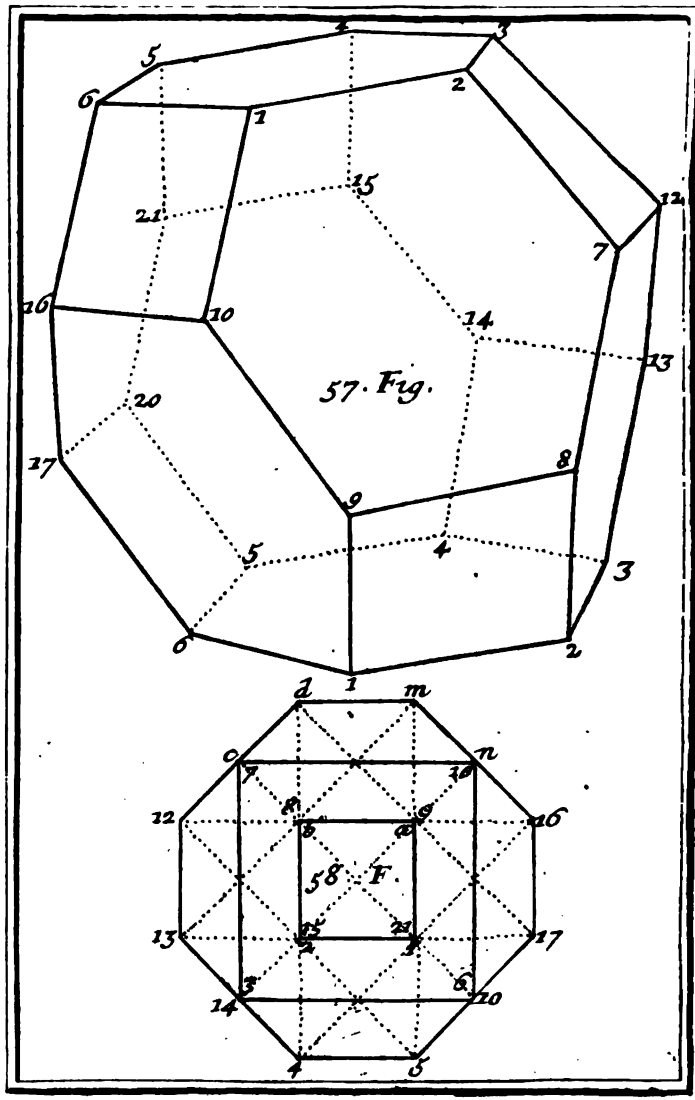




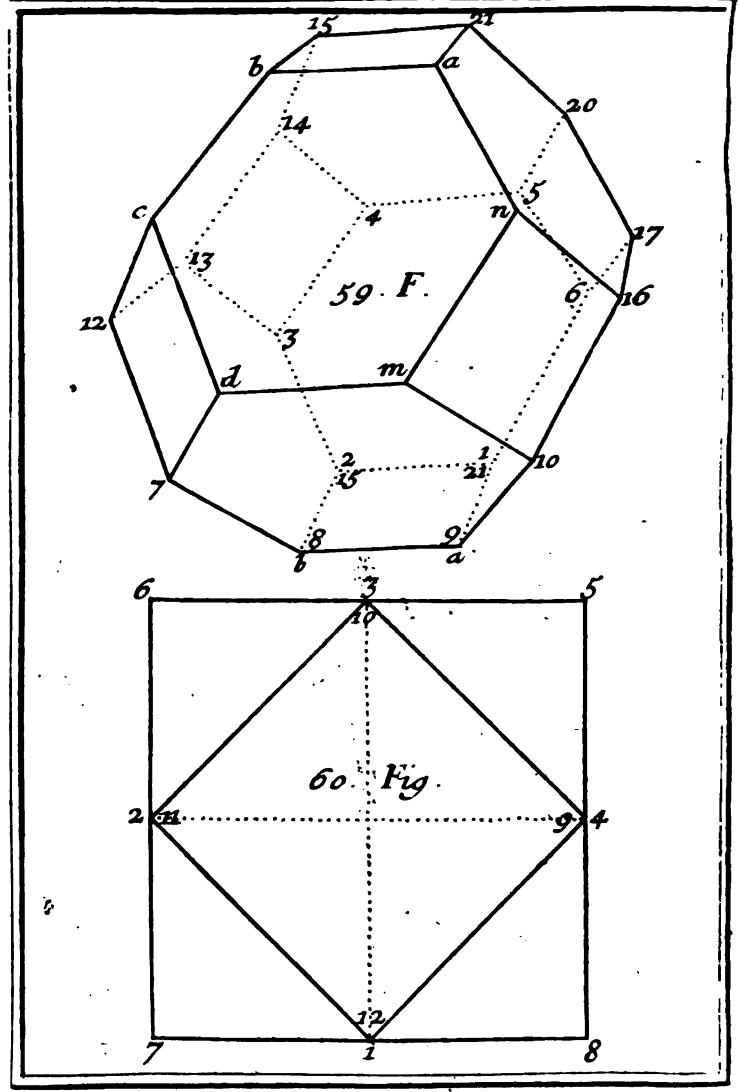
Berey Secit. To I. Pl. 13



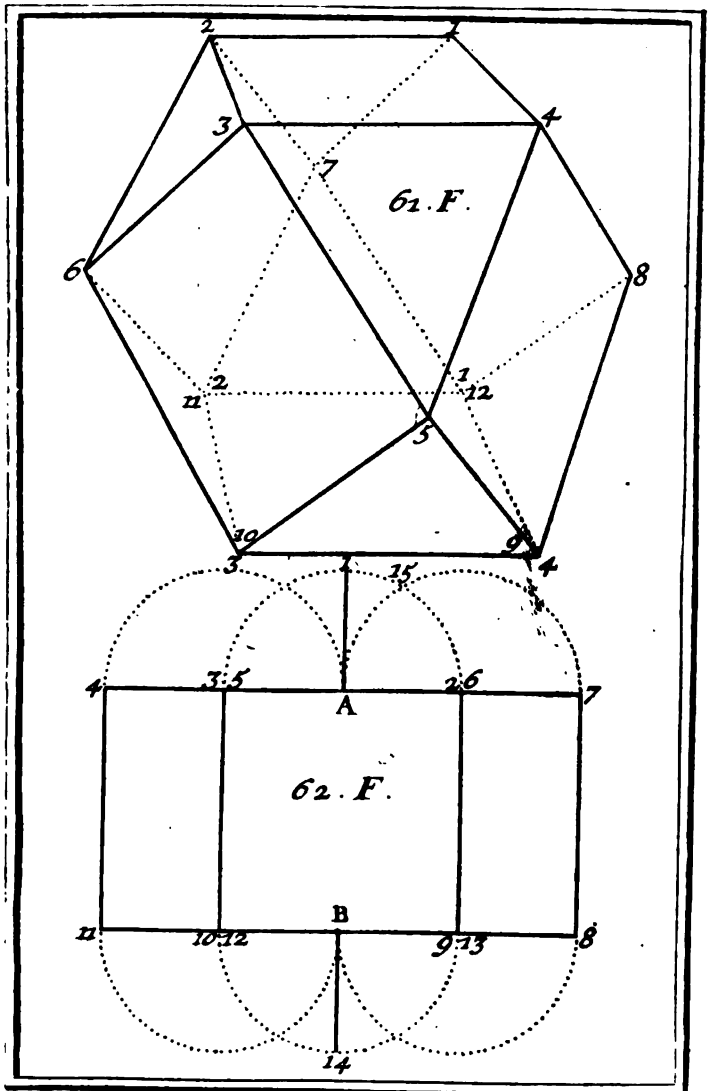
o. I. Pl. 14



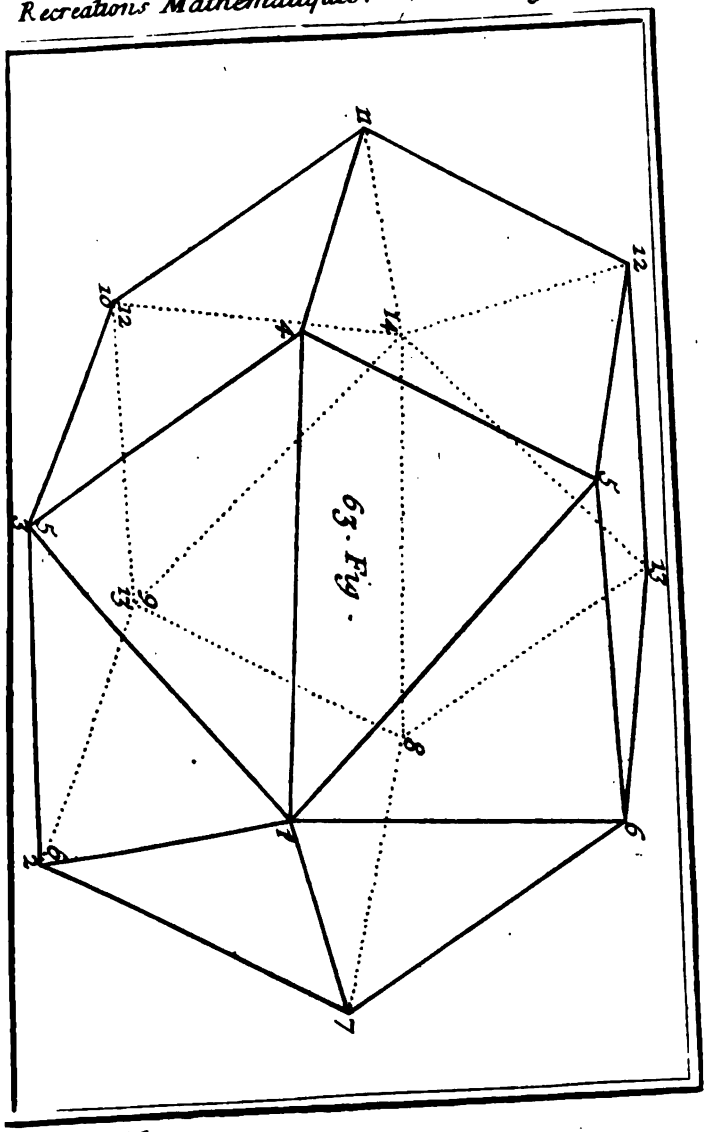
To. I. Pl. 15


15
21
b
a
20
14
5
c
4
n
27
13
59. F.
6
16
12
3
d
m
2
1
10
15
21
7
8
9
b
a
6
3
5
10
60. Fig.
2
11
9
4
12
7
1
8

To. I. Pl. 16

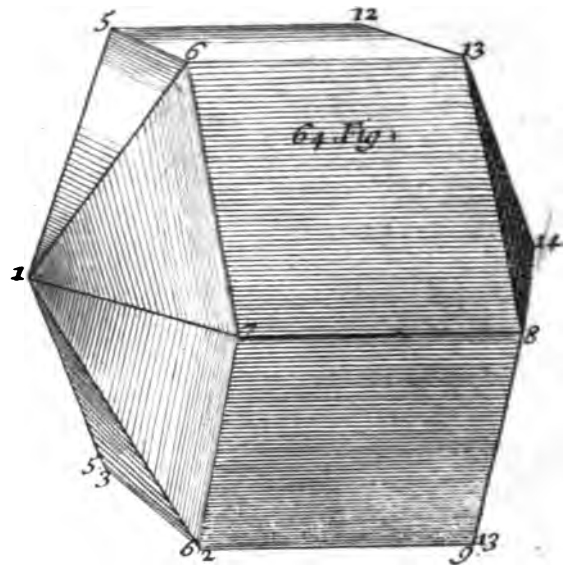


Berey. lect. To. I. Pl. 17

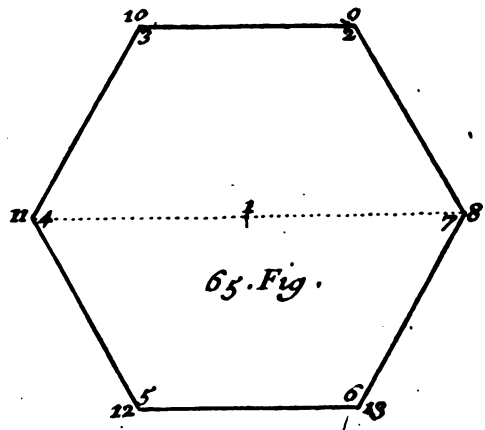


63. Fig.

Fig. I. Pl. 18

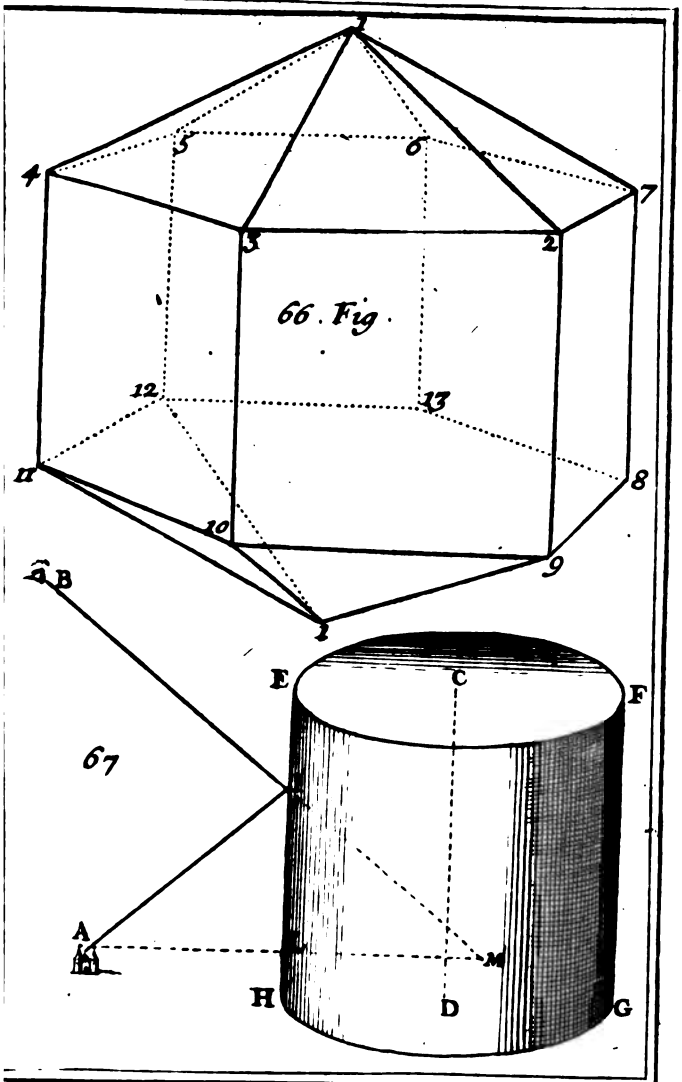


64. Fig.



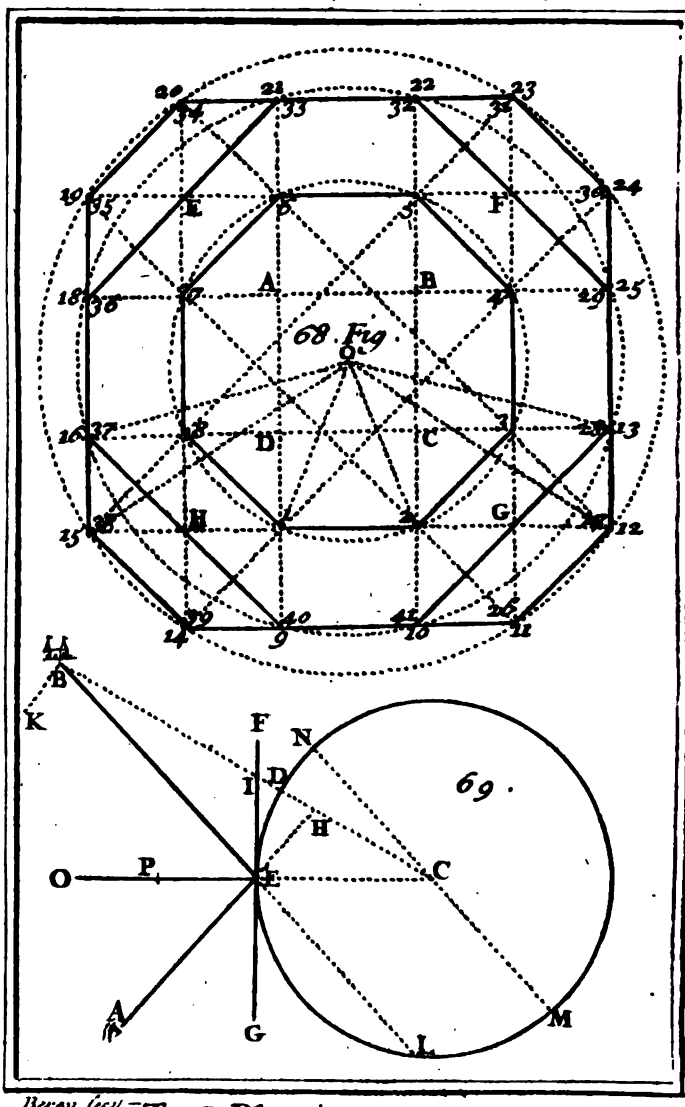
65. Fig.

Barrey. sculpt. T. I. Pl. 19



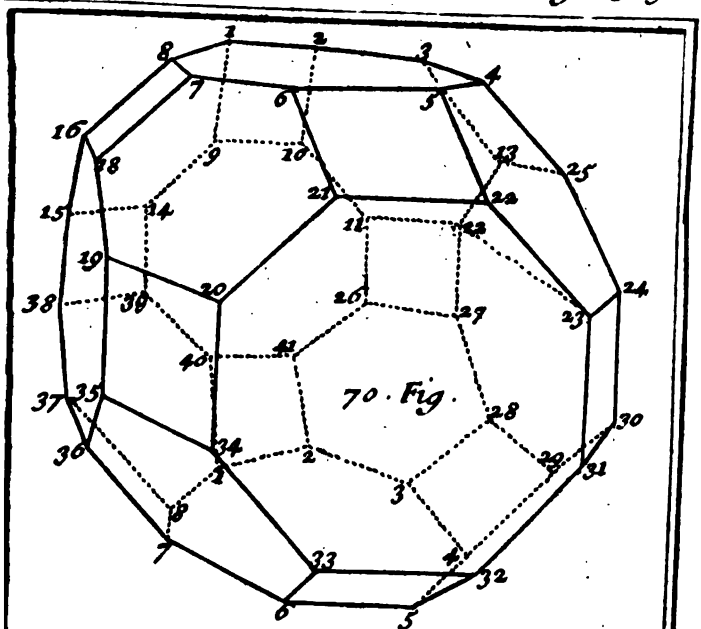
66. Fig.

67

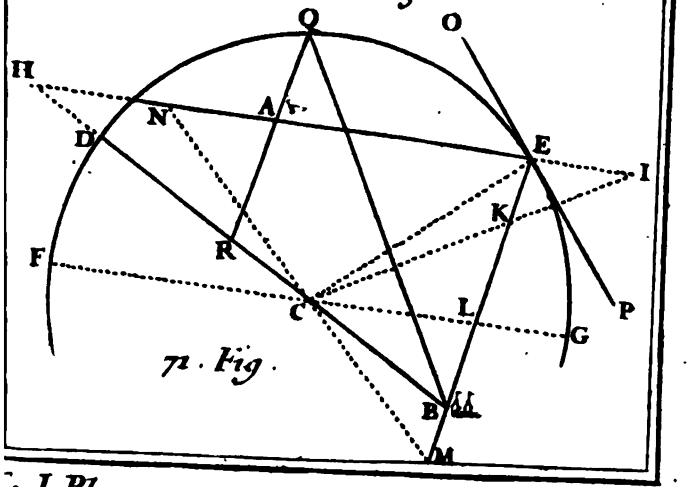


Berey fecit

To. I. Pl. 21.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48

70. Fig.


O
O
H
N
A
D
E
I
K
F
R
C
L
P
G
B
M

71. Fig.

Figure 9.

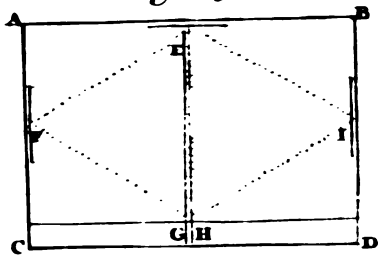


Figure 10.

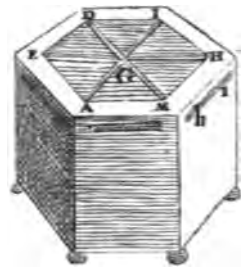


Figure 11.

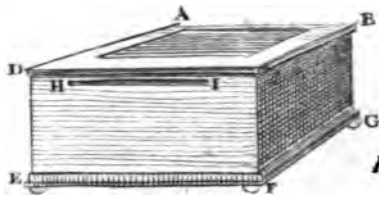


Figure 12.

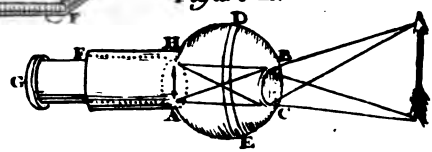
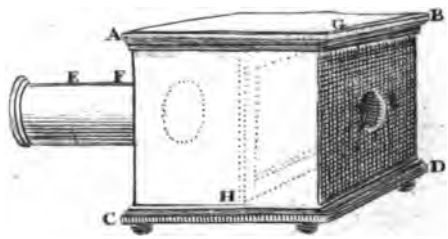


Figure 13.



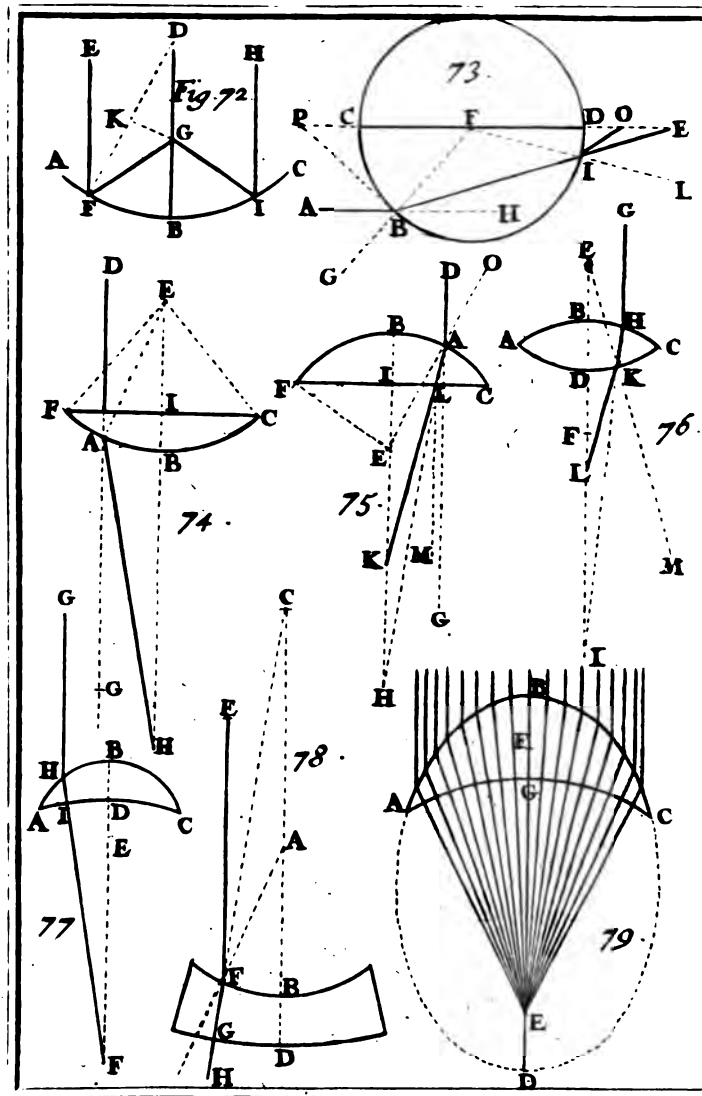


Fig. 72.
73.
74.
75.
76.
77
78.
79

Figure 14. pag 410

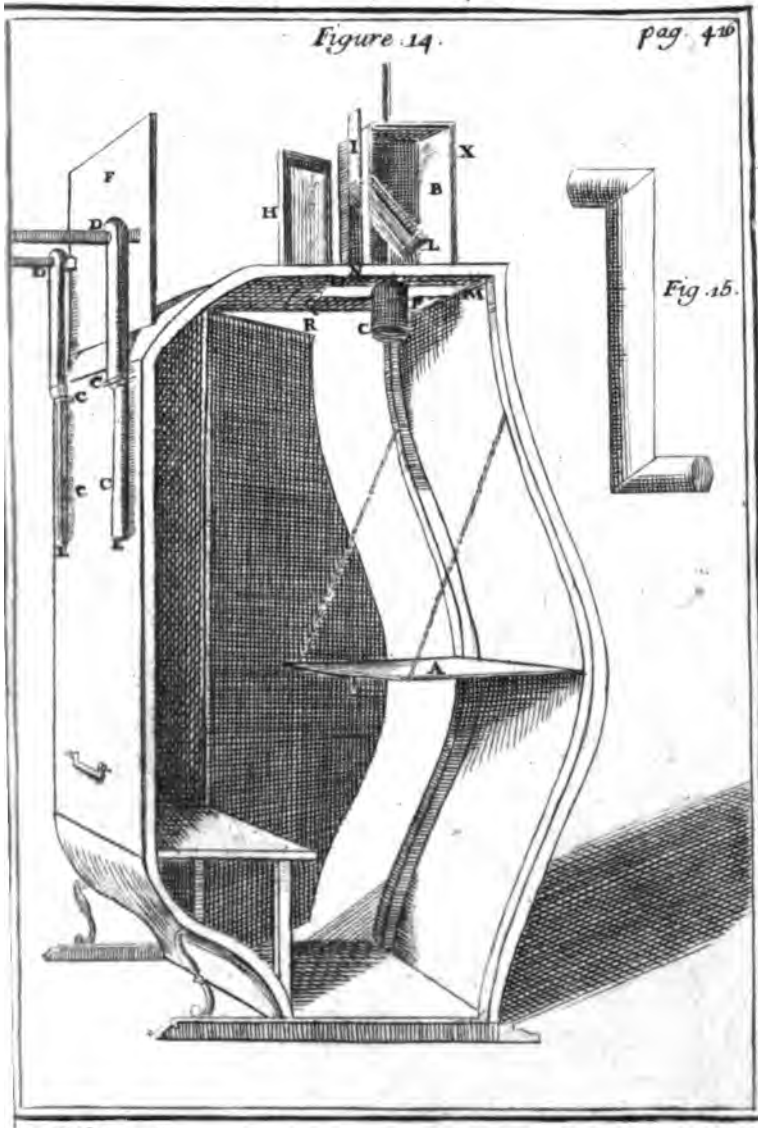


Fig 15.

T. I. Pl 25.

Fig. 16.

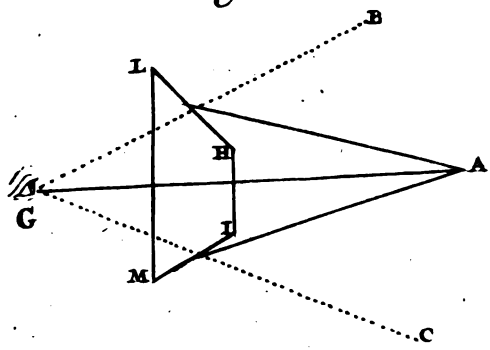


Fig. 17.

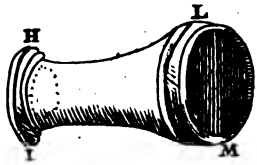


Fig. 18.

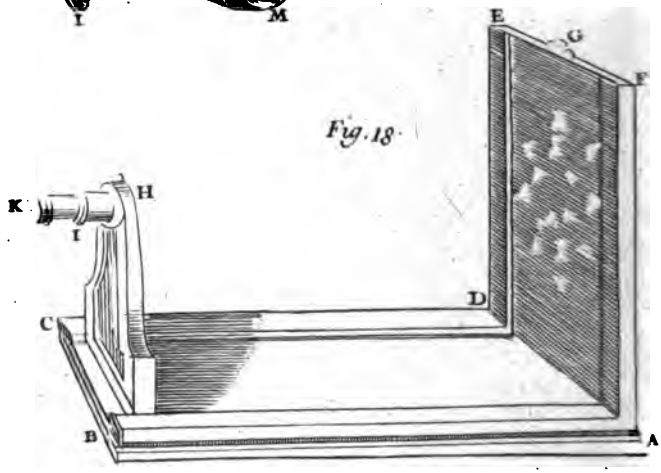
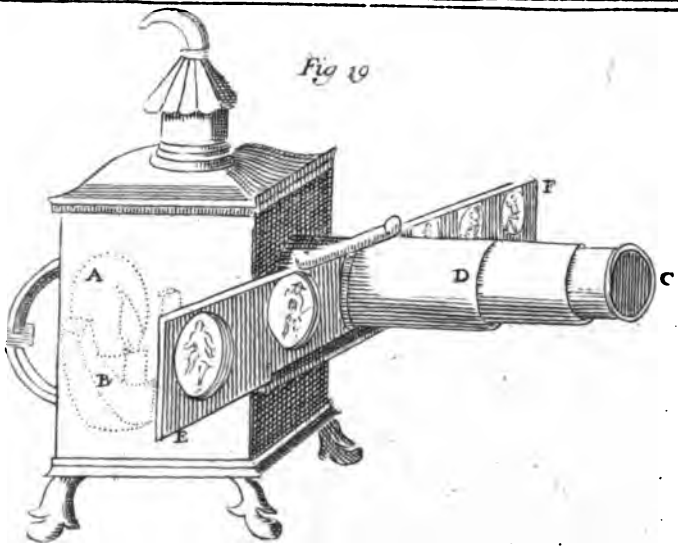
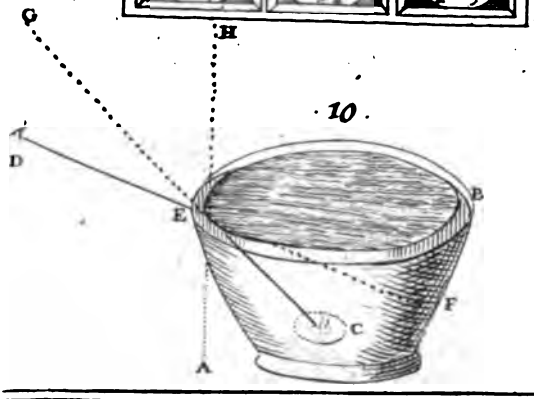


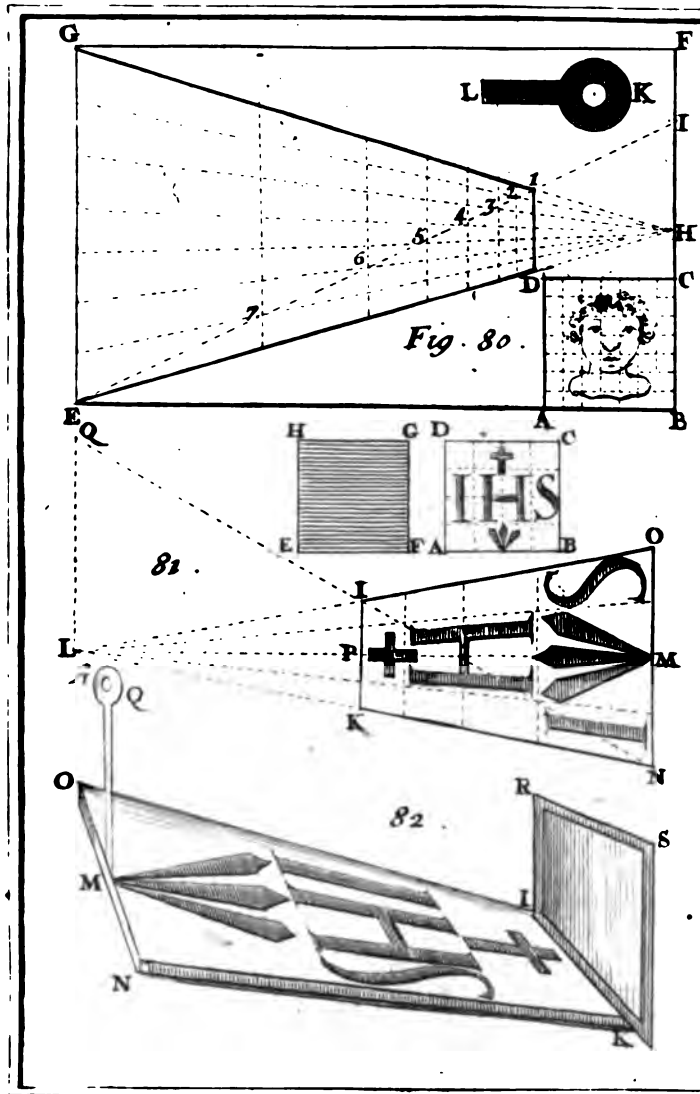
Fig 9





10.

To. I. Pl. 27.


G
F
L
K
I
1
2
3
4
5
6
7
H
D
C
Fig. 80.
E
A
B
H
G
D
C
IHS
E
F
A
B
81.
O
I
L
P
M
C
Q
K
N
O
R
S
82.
M
I
N
K

To. I. Pl. 28.

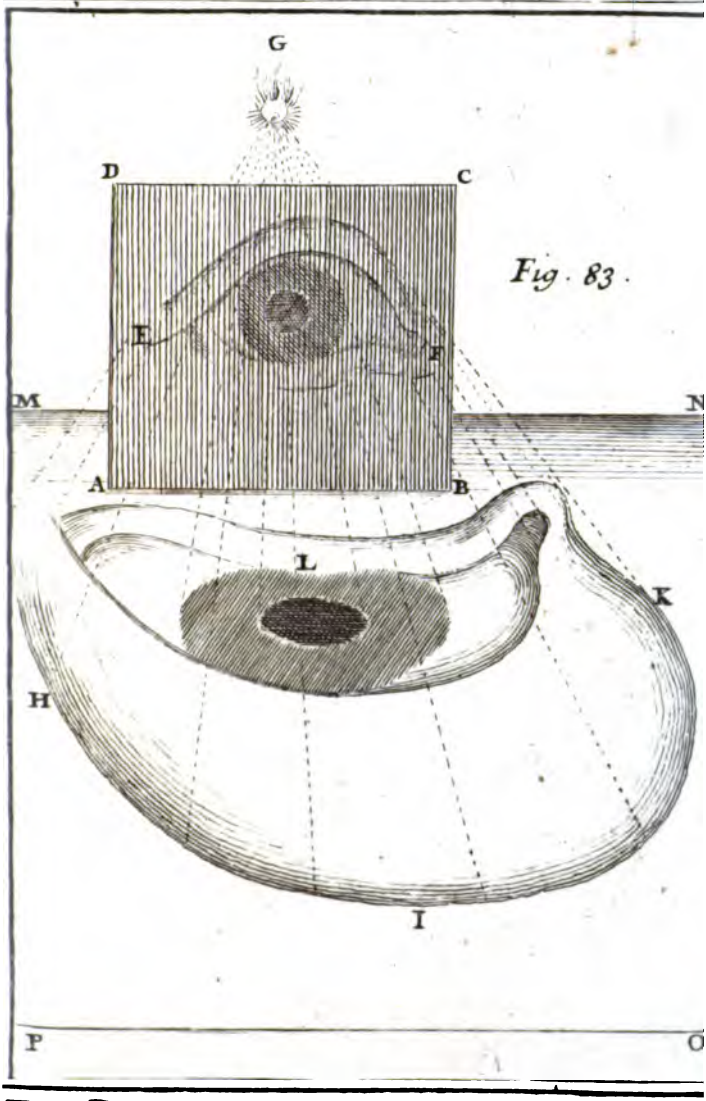
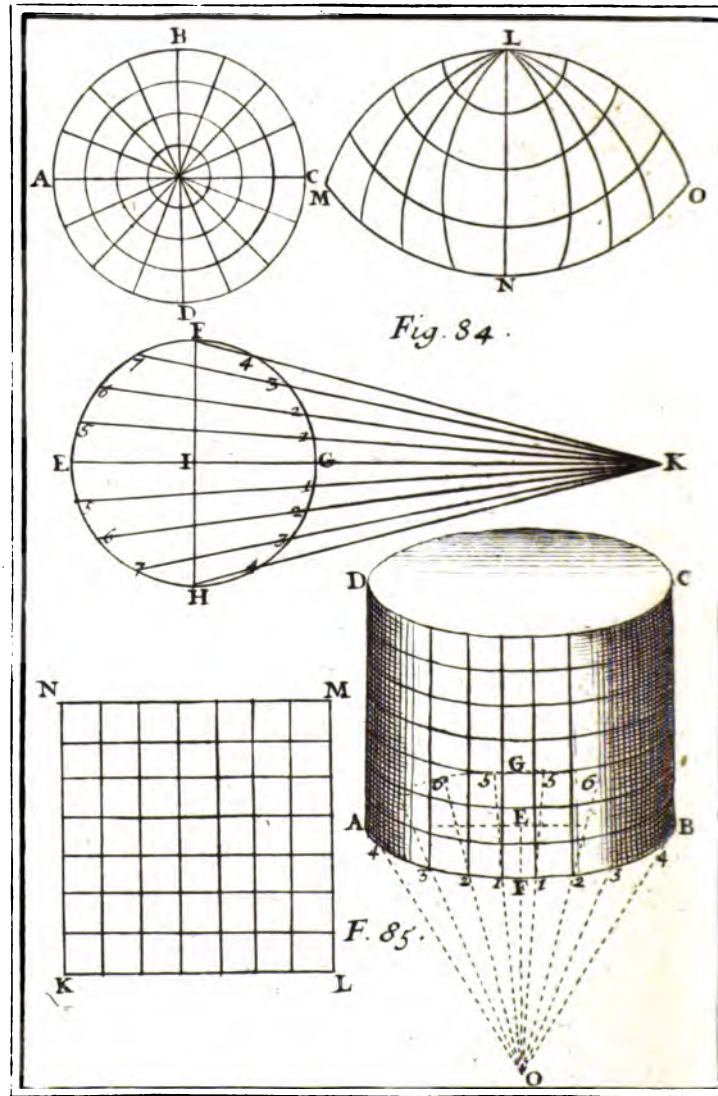
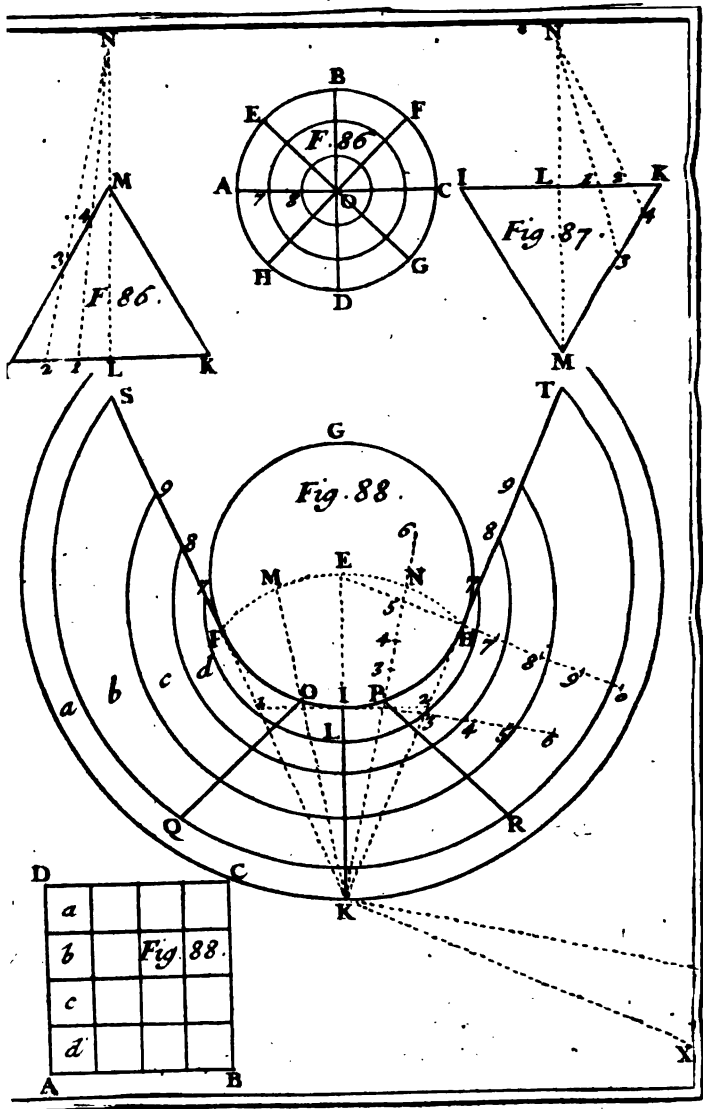


Fig. 83.

To I. Pl. 29.



To. I. Pl. 30.


N
M
F. 86.
K
B
E
F
A
C
G
H
D
F. 86
N
I
L
K
Fig. 87.
M
S
T
G
Fig. 88.
E
M
N
F
H
O
P
L
a
b
c
d
Q
R
K
X
D
C
a
b
c
d
A
B
Fig. 88.

To. I. Pl. 31

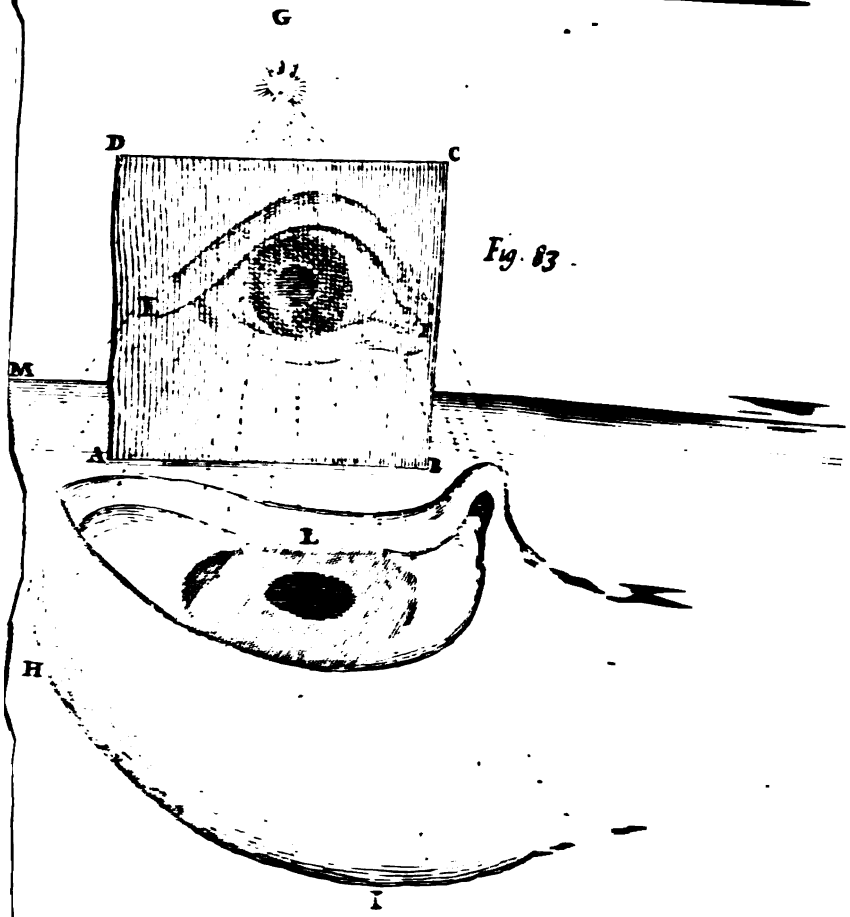
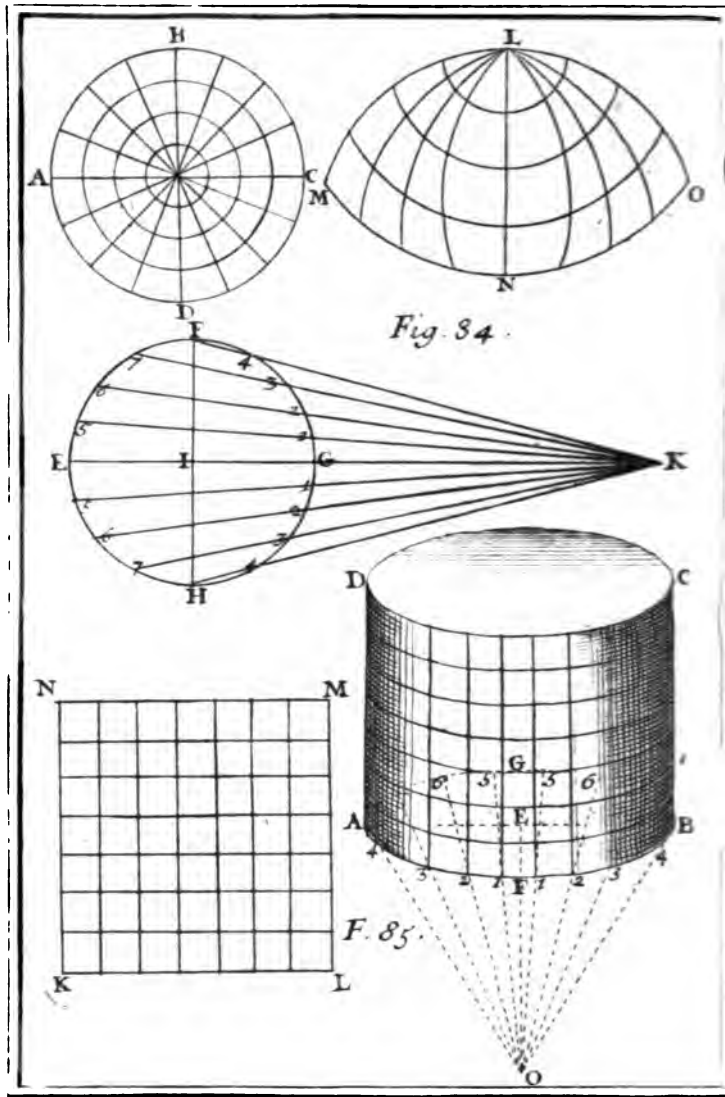
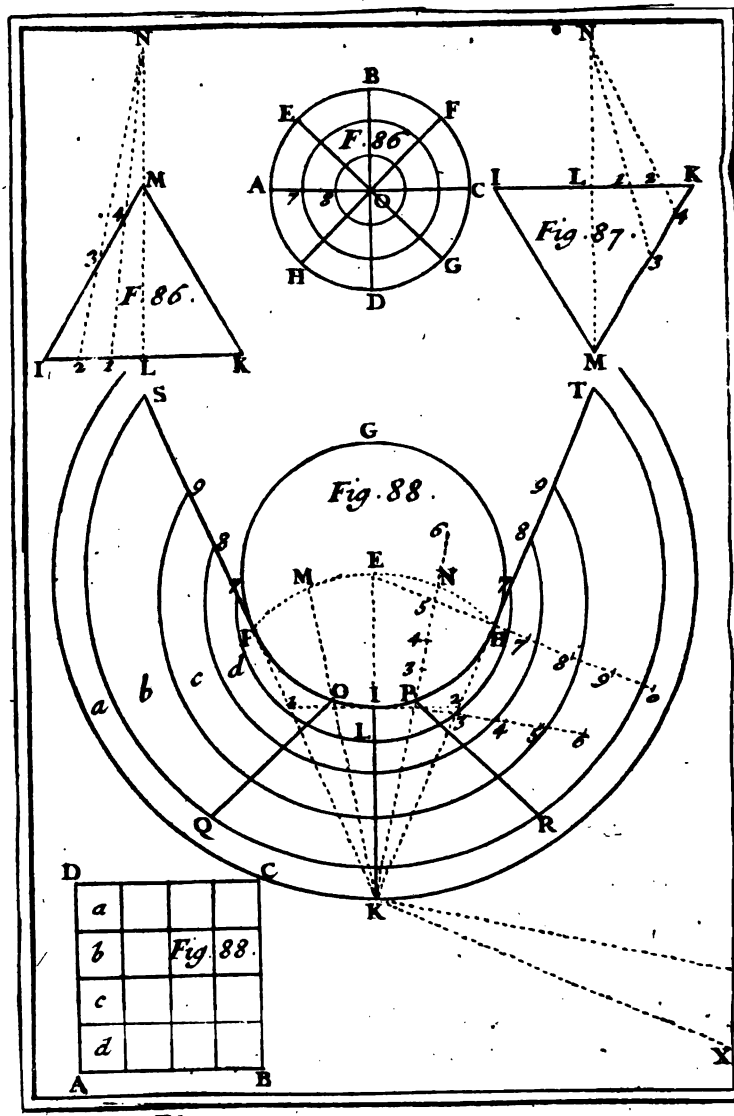


Fig. 83.



To. I. Pl. 30.


N
B
E
F
F. 86.
A
C
Q
H
G
D
M
F. 86.
I
L
K
Fig. 87.
S
T
G
Fig. 88.
M
E
N
F
H
O
P
L
a
b
c
d
Q
R
K
D
C
A
B
Fig. 88.
X

To. I. Pl. 31

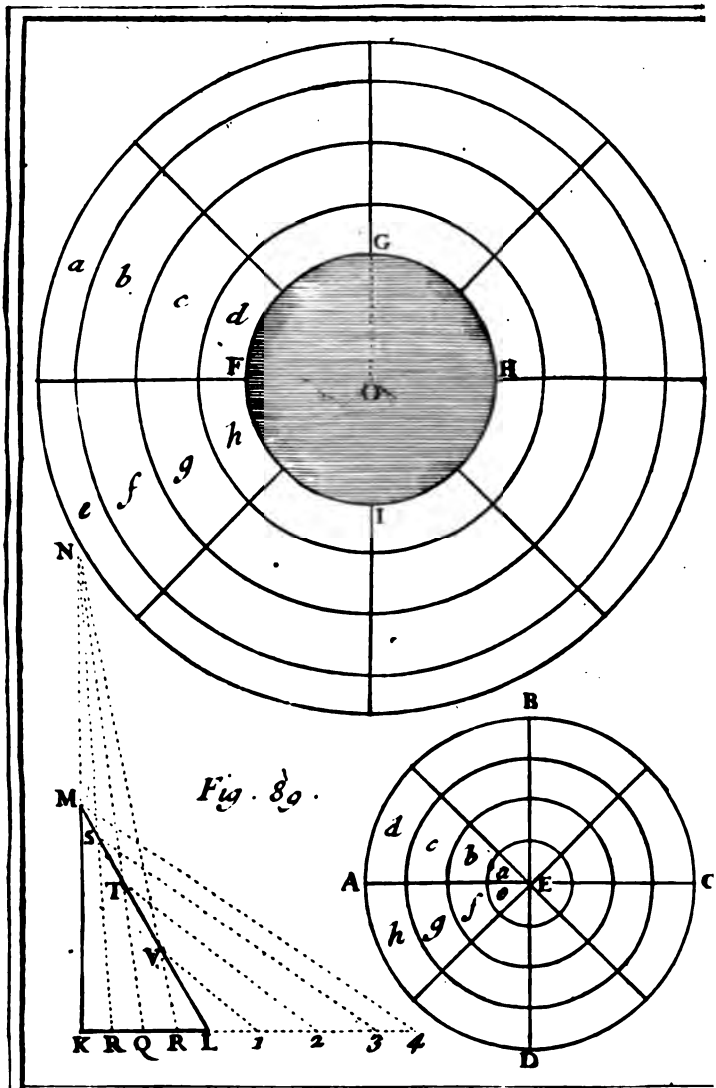


Fig. 89.

To. I. Pl. 32